

LES GUIDES MANGAS

ALGÈBRE LINÉAIRE



Auteur
Dessins
Scénario
Studio

SHIN TAKAHASHI
IROHA INOUE
RE_AKINO
TREND-PRO

Traduction

JÉRÔME GÄRTNER
TRISTAN POULLAUEC
KEVIN DESTAGNOL
THIERRY LIMOGES
VINCENT PUYHAUBERT
JÉRÔME GÄRTNER
JEAN-YVES FÉVRIER

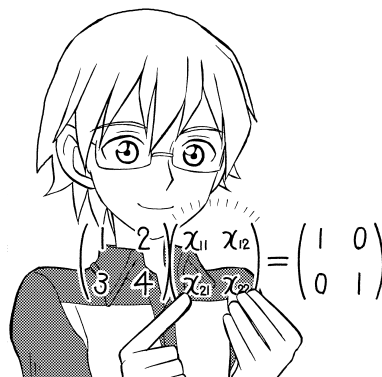
enseignant en classe prépa
enseignant en classe prépa
enseignant-chercheur
enseignant en classe prépa
enseignant en classe prépa
enseignant en classe prépa
agrégé et karatéka

Harmonisation
Révision

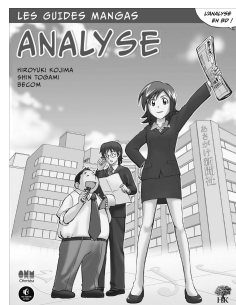


Manga de wakaru : senkeidaisuu est le titre japonais du *Guide manga de l'algèbre linéaire*. L'ouvrage a été créé par Ohmsha, l'un des éditeurs scientifiques les plus anciens et les plus respectés du Japon, et par Trend-Pro, un studio spécialisé dans les mangas. Ils ont réuni pour ce projet un scientifique très pédagogue, un dessinateur de renom et un scénariste. Une version en anglais a ensuite été co-publiée par Ohmsha et l'éditeur américain No Starch Press. L'adaptation française a été effectuée par des scientifiques accomplis, tous normaliens, enseignants, et révisée par un relecteur spécialisé.

Shin Takahashi est diplômé de l'université de Kyushu. Il est spécialisé dans l'écriture d'ouvrages scientifiques et techniques.



Ouvrage compagnon



Noriko, jeune journaliste, déborde d'enthousiasme. Mais est-elle vraiment prête à traiter les sujets qui cognent ? Son boss, M. Seki, va lui enseigner les mathématiques dont elle aura besoin pour comprendre l'économie, la pollution ou encore le réchauffement climatique.

Qu'est-ce qu'une fonction ?

1. Dérivons une fonction !
 2. Techniques de dérivation
 3. Intégrons une fonction !
 4. Techniques d'intégration
 5. Développement de Taylor
 6. Dérivées partielles
- Solutions des exercices
Aide-mémoire
Index

Vous avez trouvé une erreur ? Gasp ! Vous pouvez nous en faire part à l'adresse
errare.humanum.est@H-K.fr

© H&K, 68 boulevard de Port-Royal, 75005 Paris

© 2012 (*The Manga Guide to Linear Algebra*) Mana Takahashi et Trend-Pro, éd. No Starch Press et Ohmsha

© 2008 (*Manga de wakaru : senkeidaisuu*) Mana Takahashi et Trend-Pro, éd. Ohmsha

ISBN 978-2-35141-360-9

ISSN 2558-4375

Dépôt légal août 2019

Avant-propos

Ce manga s'adresse à tous ceux qui veulent avoir les idées claires sur l'algèbre linéaire, très rapidement, tout en passant un bon moment.

Il intéressera tout particulièrement :

- les étudiants, que ce soit pour aborder l'algèbre linéaire, comprendre un cours ou voir à quoi ça sert ;
- les lycéens qui envisagent des études scientifiques ou commerciales ;
- tous ceux qui ont le sens de l'humour et qui s'intéressent aux mathématiques !

Le livre couvre les thèmes suivants :

Qu'est-ce que l'algèbre linéaire ?	chapitre 1
Les fondamentaux	chapitre 2
Matrices	chapitres 3 et 4
Vecteurs	chapitres 5 et 6
Applications linéaires	chapitre 7
Valeurs propres et vecteurs propres	chapitre 8

La plupart des chapitres comportent une longue partie manga complétée par quelques pages de texte. Vous aurez un bon aperçu de chaque sujet même si vous sautez les pages de texte, mais je vous recommande de lire l'ensemble. L'idéal est de lire le livre une fois puis de revenir sur chaque chapitre à mesure de vos besoins.

Ce livre est conçu comme un complément à d'autres ouvrages plus exhaustifs, il ne s'y substitue pas.

Je remercie mon éditeur, Ohmsha, de m'avoir donné l'occasion d'écrire ce livre, ainsi qu'Iroha Inoue, l'illustrateur du manga. Je suis reconnaissant à re_akino, qui a créé le scénario, et à toute l'équipe de Trend-Pro, qui a rendu possible la conversion de mon manuscrit en manga. J'ai reçu de bons conseils de Kazuyuki Hiraoka et de Shizuka Hori. Je vous remercie tous.

Shin Takahashi

Table des matières

Prologue – Que l’entraînement commence !	7
---	----------

1	Qu’est-ce que l’algèbre linéaire ?	15
----------	---	-----------

2	Les fondamentaux	27
----------	-------------------------	-----------



Ensembles de nombres	31
Implication et équivalence	33
Théorie des ensembles	36
Fonctions	41
image d’un élément	46
image d’une fonction	50
fonctions surjectives et injectives	52
fonctions réciproques	54
applications linéaires	56
Main à la pâte : permutations, combinaisons et arrangements	61

3	Introduction aux matrices	65
----------	----------------------------------	-----------



Qu’est-ce qu’une matrice ?	68
Calculs matriciels	72
Matrices particulières	79
matrices nulles	79
matrices transposées	80
matrices symétriques	81
matrices triangulaires (supérieures et inférieures)	81
matrices diagonales	82
matrices identité	84

4	Plus de matrices	87
----------	-------------------------	-----------



Matrices inverses	88
Calculer une matrice inverse	90
Déterminants	97
Calculer des déterminants	98
Main à la pâte : calculer et utiliser des déterminants	110
calculer un déterminant grâce aux cofacteurs	110
inverser une matrice grâce aux cofacteurs	111
règles de calcul des déterminants	111
résoudre un système avec la règle de Cramer	113
comment interpréter le déterminant ?	114

5



Introduction aux vecteurs 115

Que sont les vecteurs ?	118
Calculs vectoriels	127
Interprétations géométriques	129

6



Plus de vecteurs 133

Indépendance linéaire	134
Bases	142
Dimension	151
sous-espaces vectoriels	152
sous-espaces engendrés	156
base et dimension	158
Main à la pâte : produits de vecteurs	163
le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$	164
qu'est-ce qu'un espace vectoriel ?	165
qu'est-ce qu'un produit scalaire ?	166
le produit vectoriel	167

7



Applications linéaires 169

Qu'est-ce qu'une application linéaire ?	172
Pourquoi on étudie les applications linéaires	179
Transformations particulières	184
distorsion	185
rotation	186
translation	188
projection	191
Main à la pâte : relations et ensembles remarquables	194
applications linéaires et matrices	194
retour sur les espaces vectoriels engendrés	197
matrices inversibles et déterminants	197
noyau, image et rang d'une application linéaire	198

8



Valeurs propres et vecteurs propres 203

Que sont les valeurs propres et les vecteurs propres ?	209
Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres	214
Élever une matrice $n \times n$ à la puissance p	217
Main à la pâte : matrices diagonalisables	222
retour sur l'exemple	222
quelles matrices sont diagonalisables ?	223

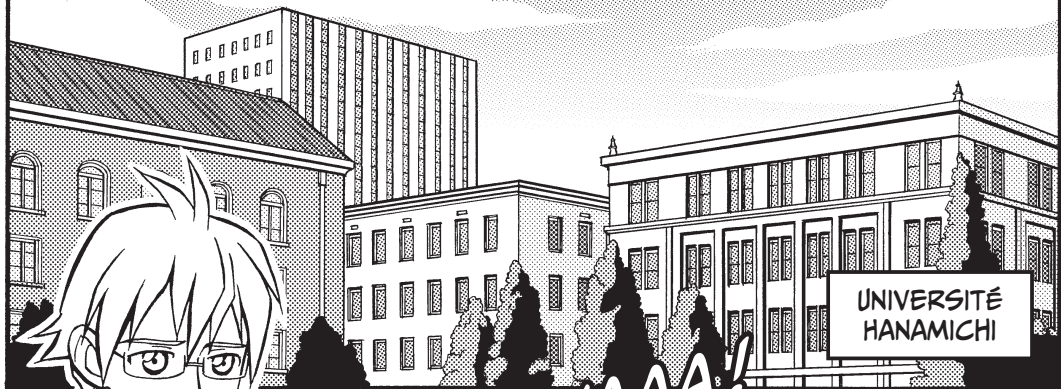
Épilogue 227

Index	239
-------------	-----

PROLOGUE

QUE L'ENTRAÎNEMENT COMMENCE !





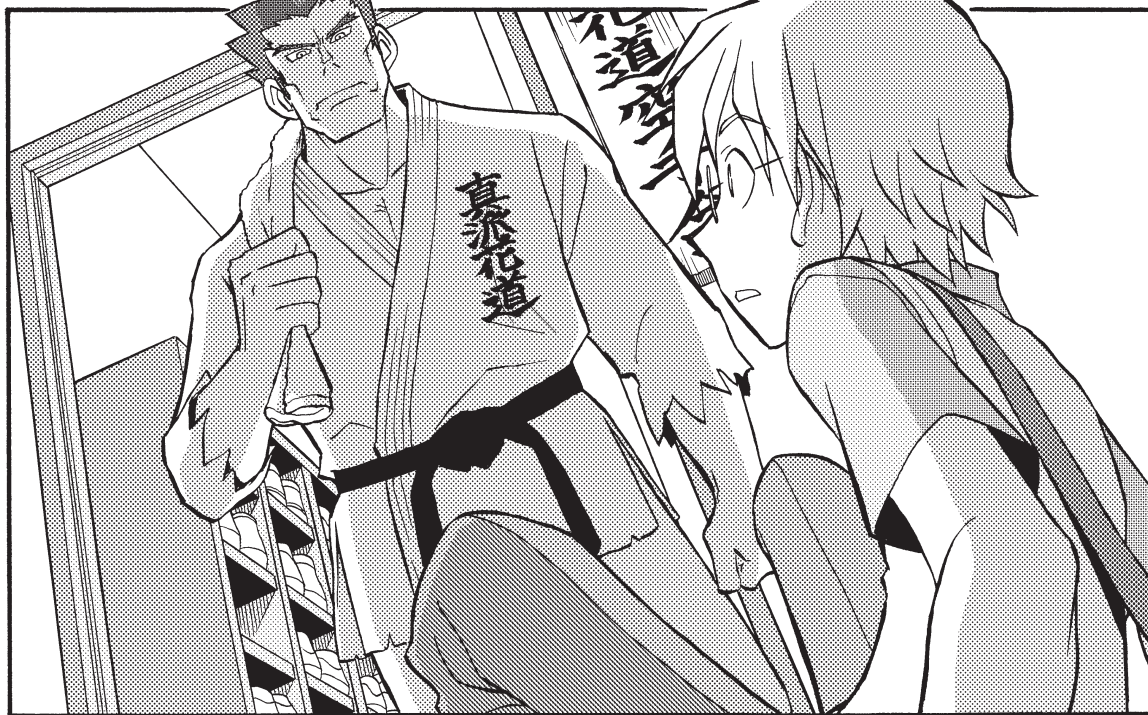
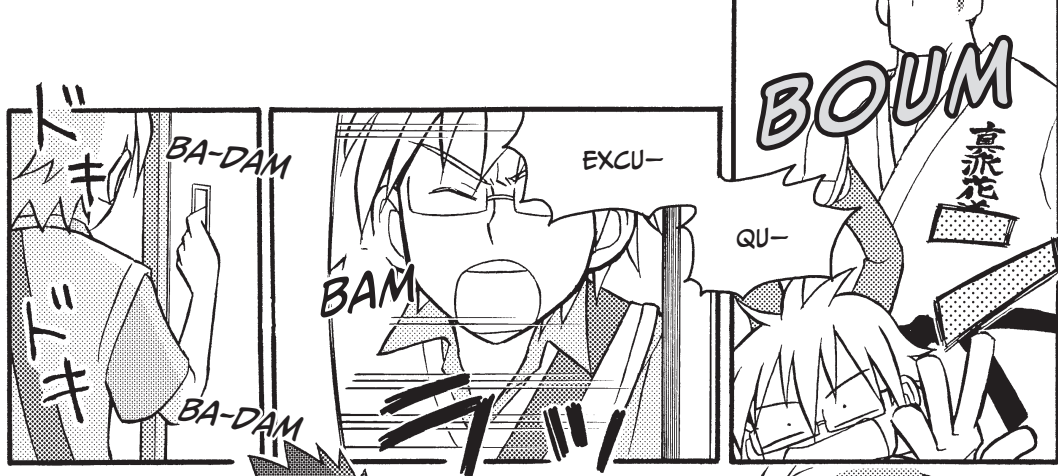
PAS DE RAISON
D'AVOIR PEUR...

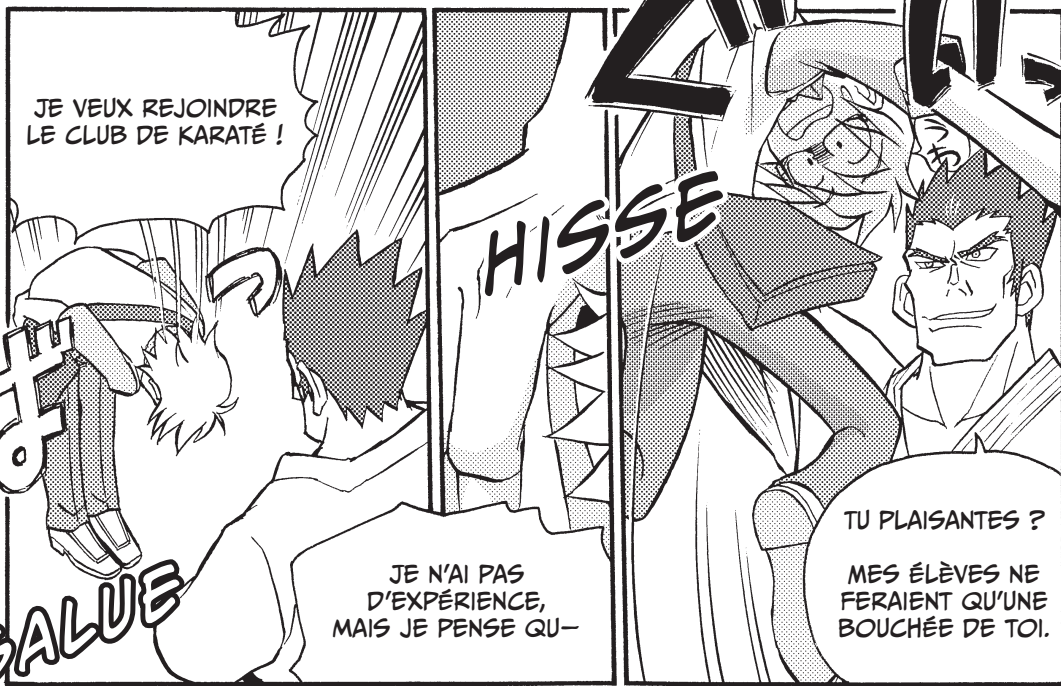
OK !

真流花道空手会*

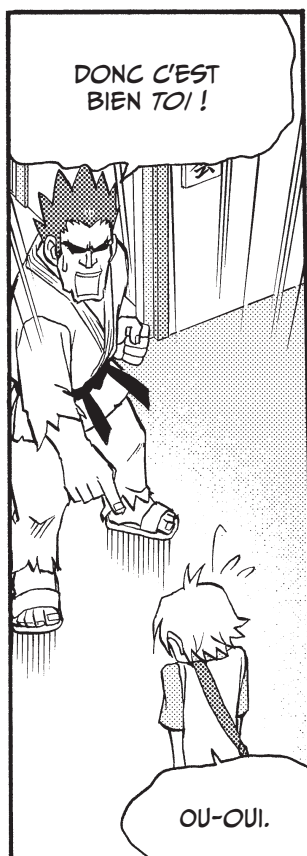
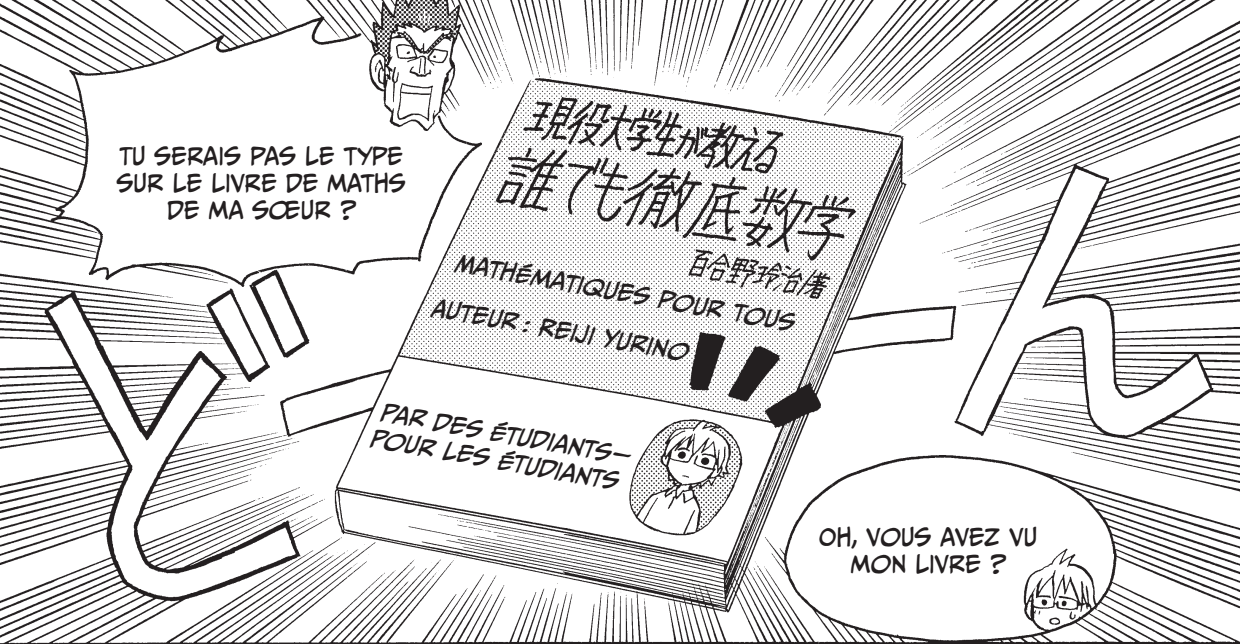
C'EST LE MOMENT
OU JAMAIS !

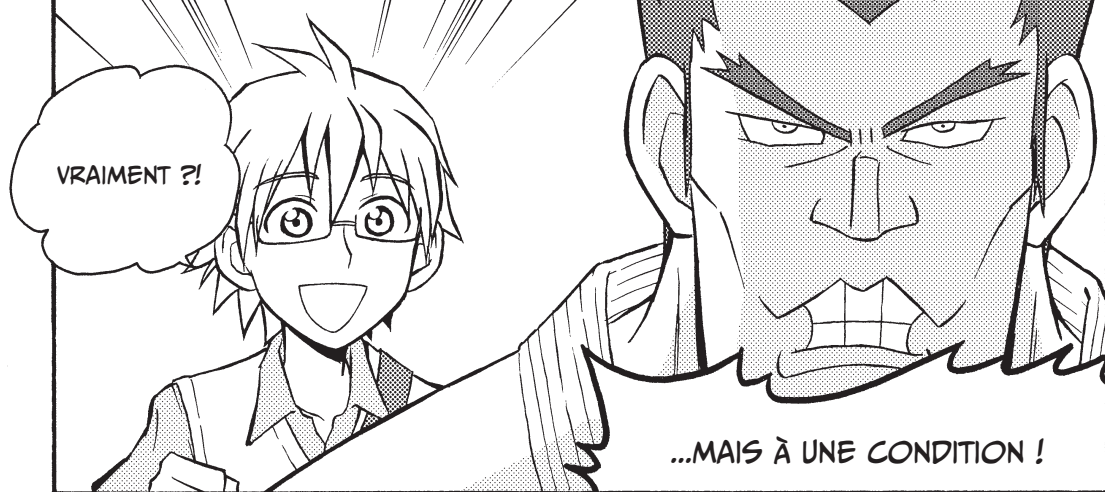
* CLUB DE KARATÉ DE HANAMICHI

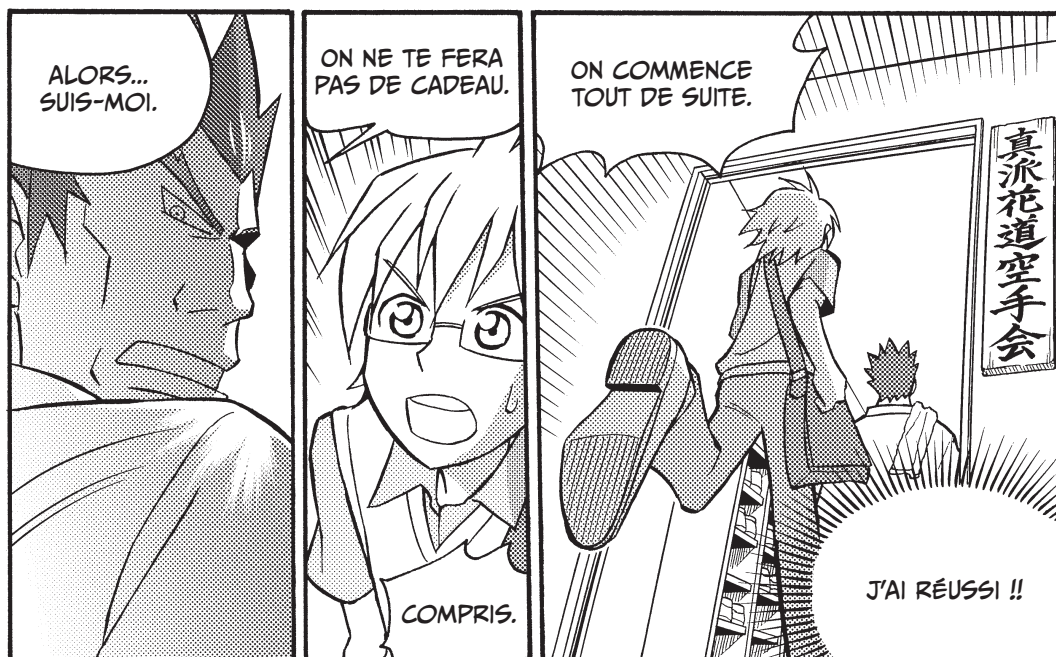
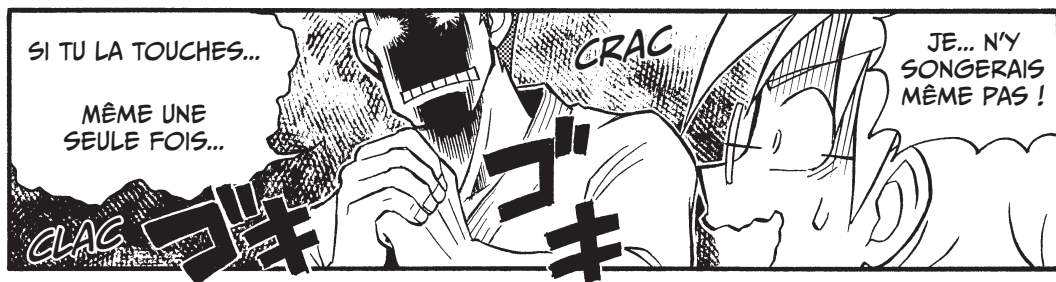
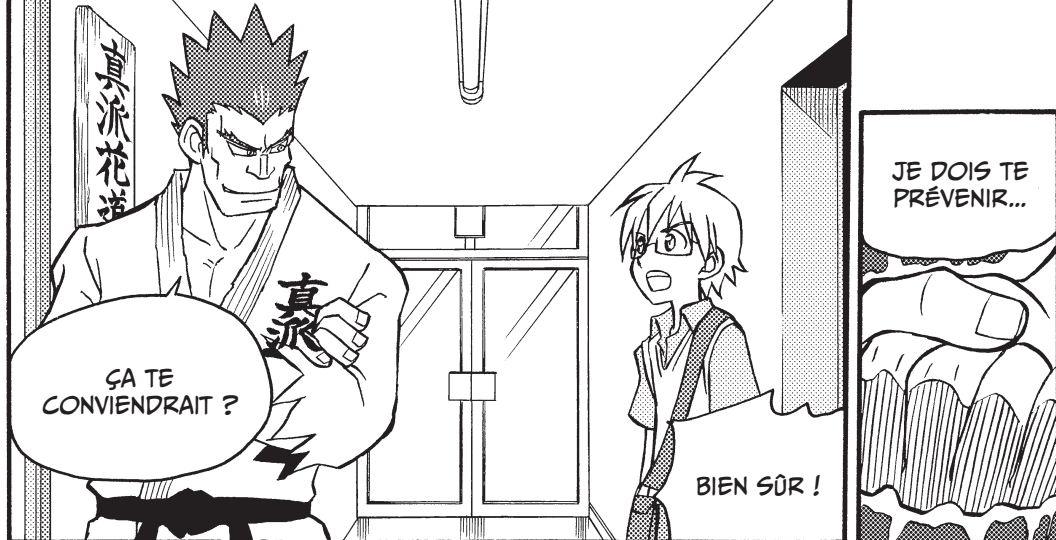






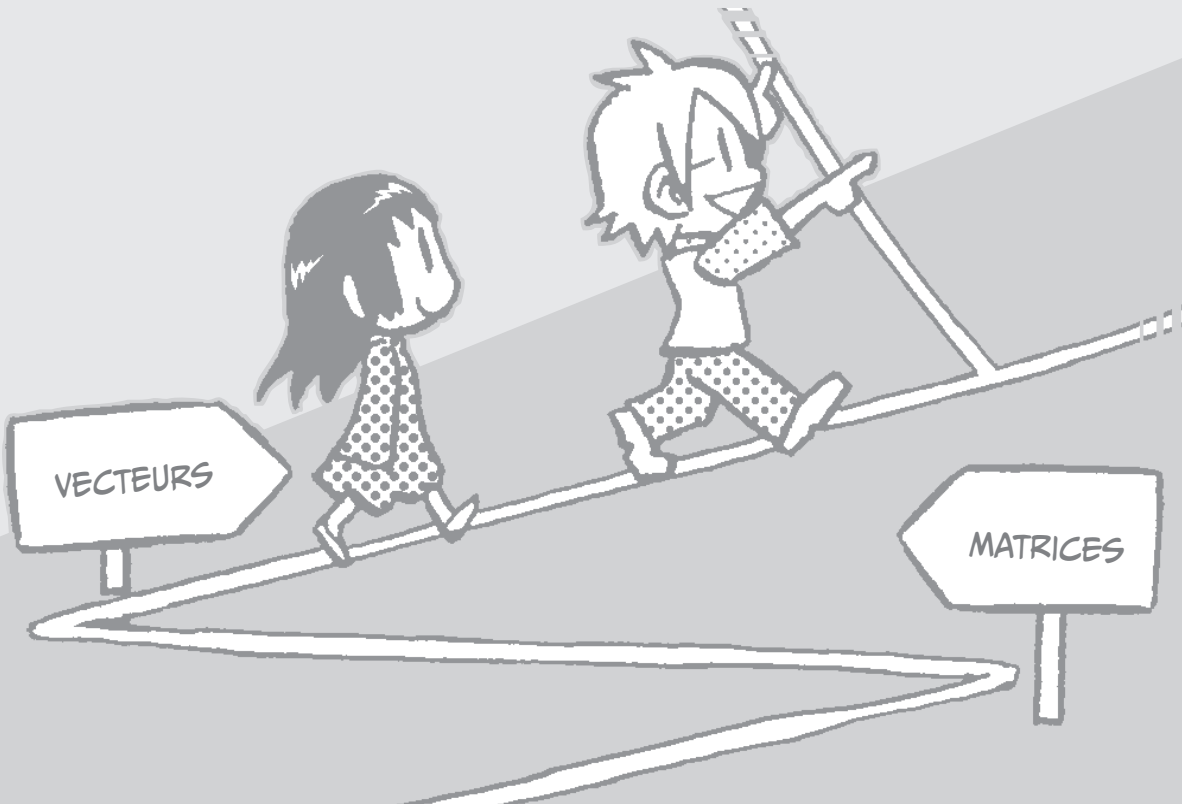






1

QU'EST-CE QUE L'ALGÈBRE LINÉAIRE ?



SALVEZ !



**OSSU !
MERCI !**

SALVEZ !



**OSSU !
MERCI !**

YURINOOO!



わっ

ENCORE EN VIE, HEIN ?

O-OSSU...

真

TU POURRAS COMMENCER À AIDER MA SŒUR QUAND TU AURAS NETTOYÉ LA SALLE ET TOUT RANGÉ, OK ?

ENCORE EN VIE, HEIN ?

O-OSSU...

真

TU POURRAS COMMENCER À AIDER MA SŒUR QUAND TU AURAS NETTOYÉ LA SALLE ET TOUT RANGÉ, OK ?

ENCORE EN VIE, HEIN ?

O-OSSU...

真

TU POURRAS COMMENCER À AIDER MA SŒUR QUAND TU AURAS NETTOYÉ LA SALLE ET TOUT RANGÉ, OK ?

ELLE AUSSI EST EN
PREMIÈRE ANNÉE
MAIS VOUS AVEZ
L'AIR NOMBREUX,
TU NE DOIS PAS LA
CONNAÎTRE.

**TREMBLE
CHANCELLE**

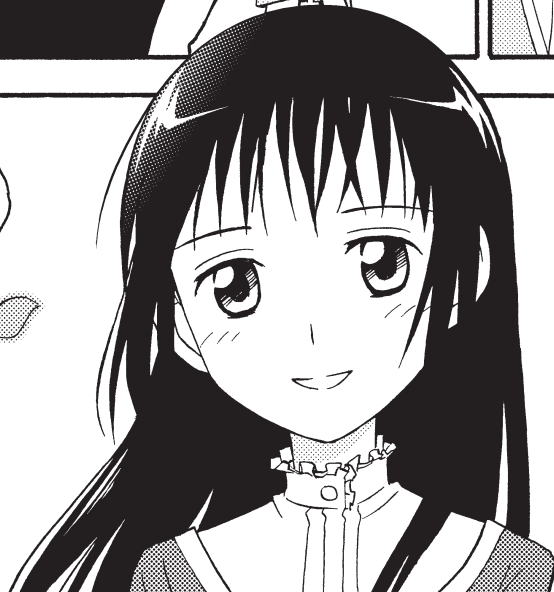
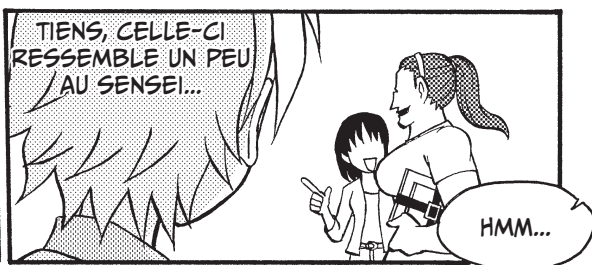
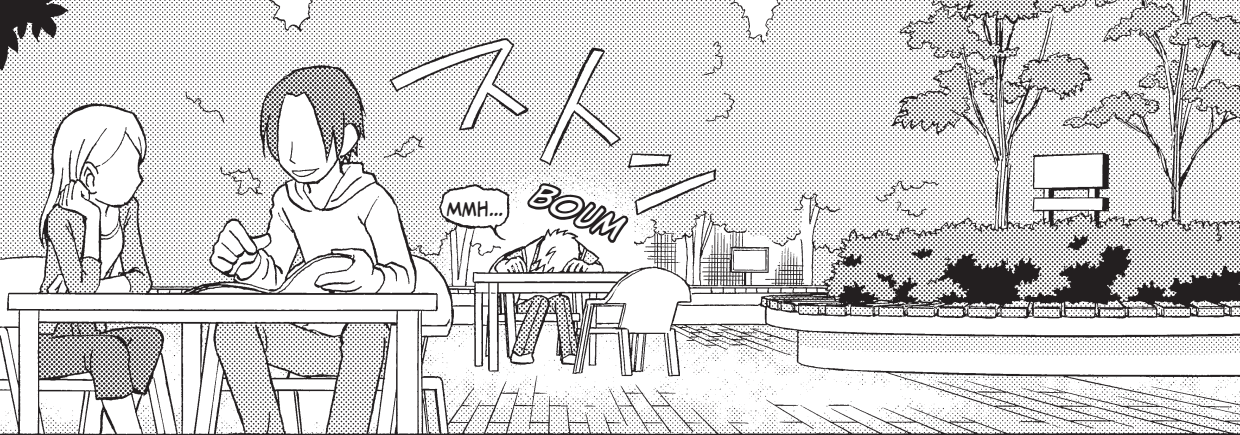
ELLE AUSSI EST EN
PREMIÈRE ANNÉE
MAIS VOUS AVEZ
L'AIR NOMBREUX,
TU NE DOIS PAS LA
CONNAÎTRE.

**TREMBLE
CHANCELLE**

ELLE AUSSI EST EN
PREMIÈRE ANNÉE
MAIS VOUS AVEZ
L'AIR NOMBREUX,
TU NE DOIS PAS LA
CONNAÎTRE.

**TREMBLE
CHANCELLE**

* OSSU EST UNE INTERJECTION QU'ON UTILISE SOUVENT DANS LES ARTS MARTIAUX JAPONAIS POUR SALUER LE PROFESSEUR.



DÉSOLÉE QUE
MON FRÈRE T'AIT
DEMANDÉ UN SI
GROS SERVICE
À L'IMPROVISTE.

PAS DE
PROBLÈME !
RAVI D'ÊTRE
UTILE !

COMMENT
PEUT-ELLE ÊTRE
SA SŒUR ?!

JE...

JE NE SAVAIS PAS QUE
J'ÉTUDIAIS AU MÊME ENDROIT
QUE LE CÉLÈBRE
REIJI YURINO !

EUH, JE N'IRAIS
PAS JUSQU'À DIRE
CÉLÈBRE...

J'ATTENDAIS CETTE
OCCASION AVEC
IMPATIENCE !

EUH...
ÇA T'EMBÊTERAIT
DE SIGNER MON
EXEMPLAIRE ?

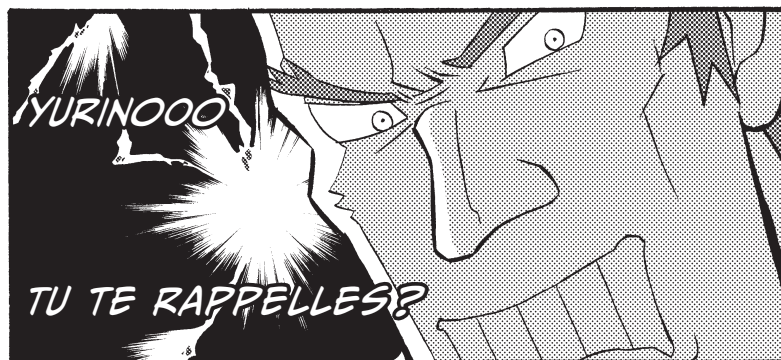
COMME... UN
AUTOGRAPHE ?

AVEC PLAISIR.

SI ÇA NE TE GÊNE
PAS, BIEN SÛR...

TOUCHE

OUPS



UN APERÇU DE
L'ALGÈBRE LINÉAIRE

BIEN,
QUAND VEUX-TU
COMMENCER ?

POURQUOI PAS
TOUT DE SUITE ?

VOYONS
VOIR...

TON FRÈRE M'A DIT QUE
TU AVAIS DU MAL AVEC
L'ALGÈBRE LINÉAIRE ?

OUI.

JE NE
COMPRENDS
PAS LE
PRINCIPE...

ET LES CALCULS
ME PASSENT
AU-DESSUS
DE LA TÊTE.

C'EST VRAI QUE
L'ALGÈBRE
LINÉAIRE EST
PLUTÔT
ABSTRAITE,

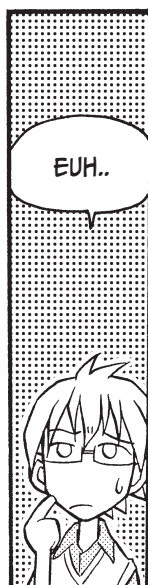
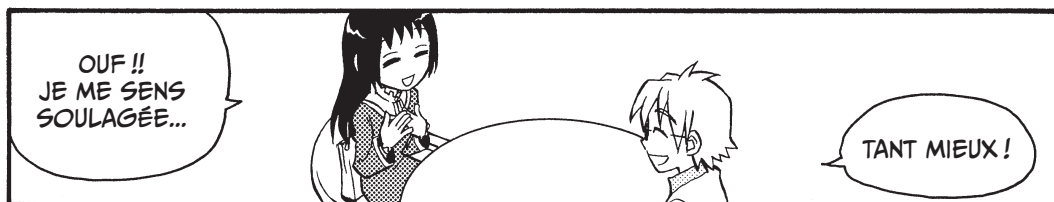
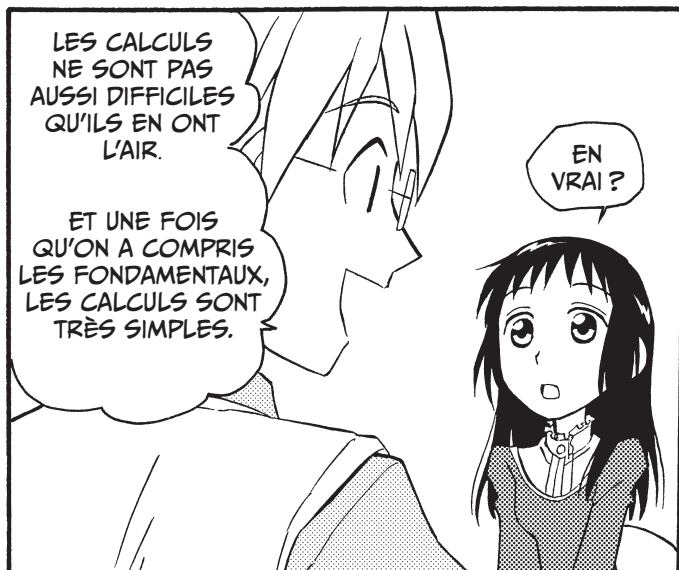
ET QUE CERTAINS
CONCEPTS SONT
DIFFICILES À
COMPRENDRE...

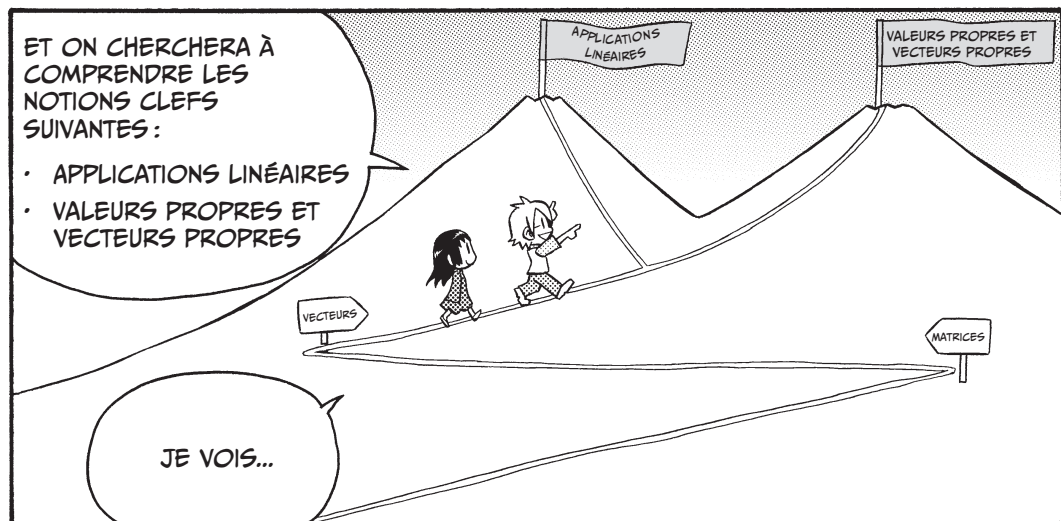
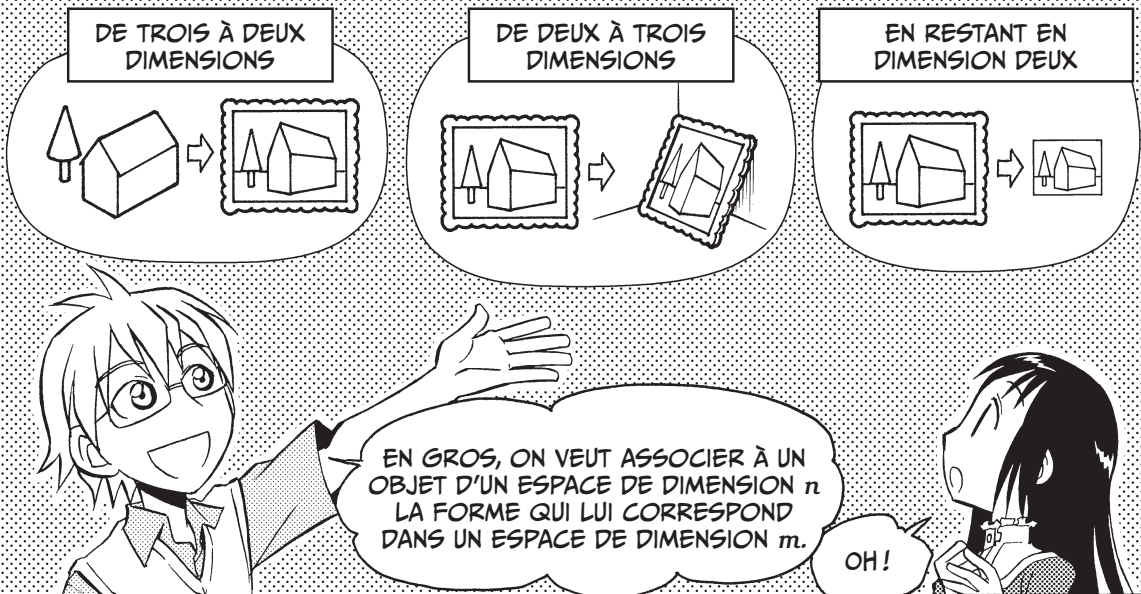
INDÉPENDANCE
LINÉAIRE

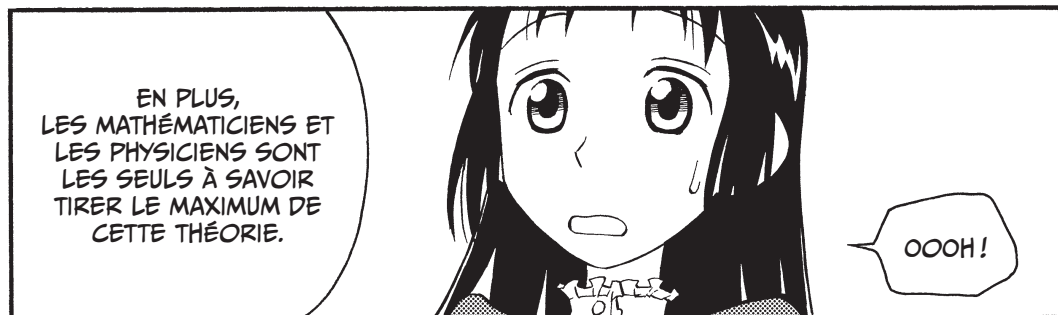
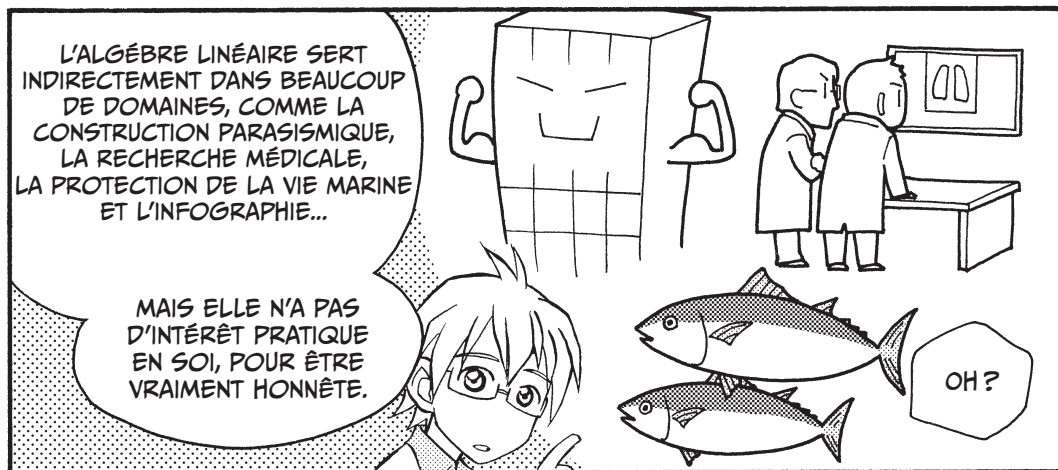
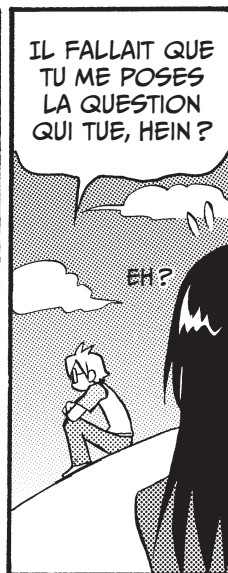
SOUS-
ESPACE

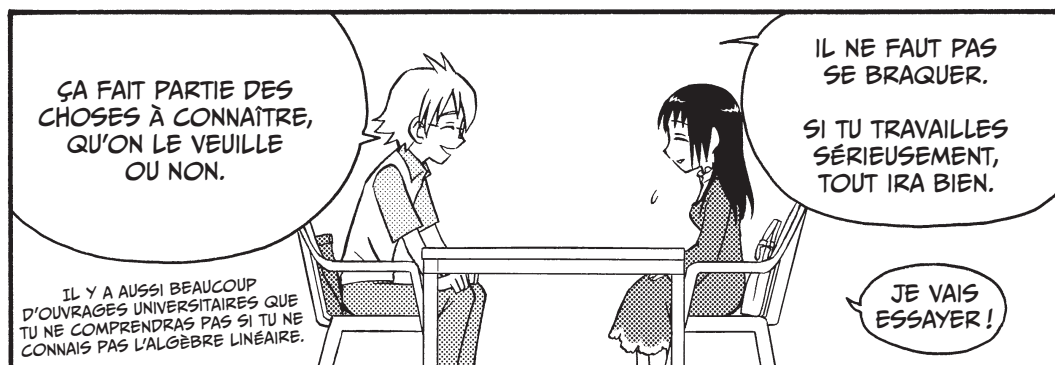
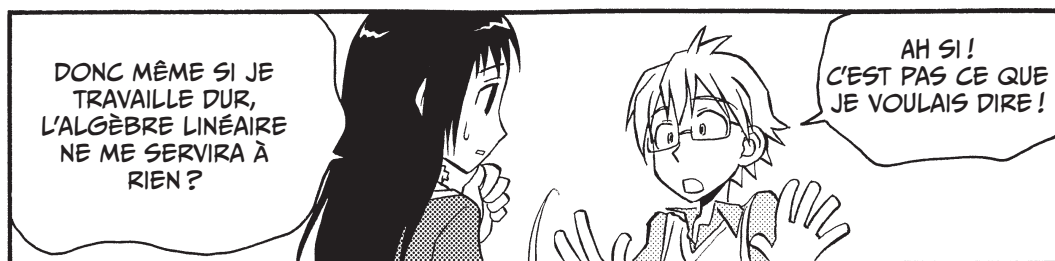
BASES

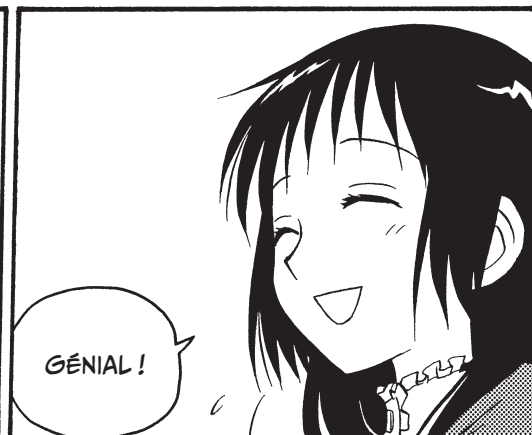
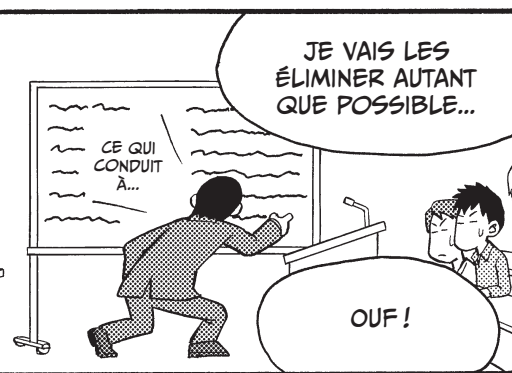
MAIS !

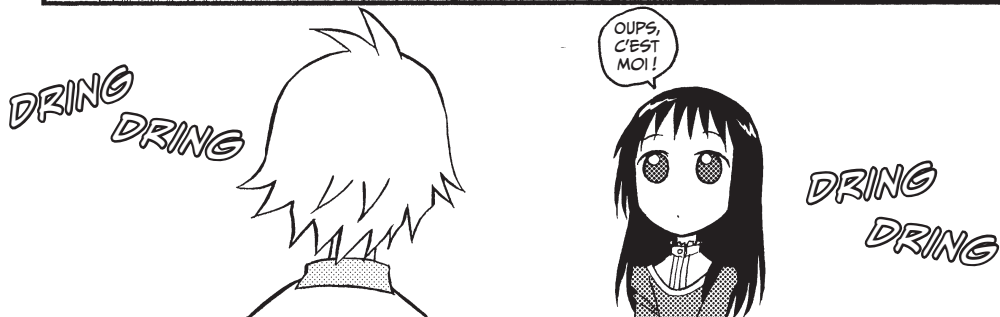
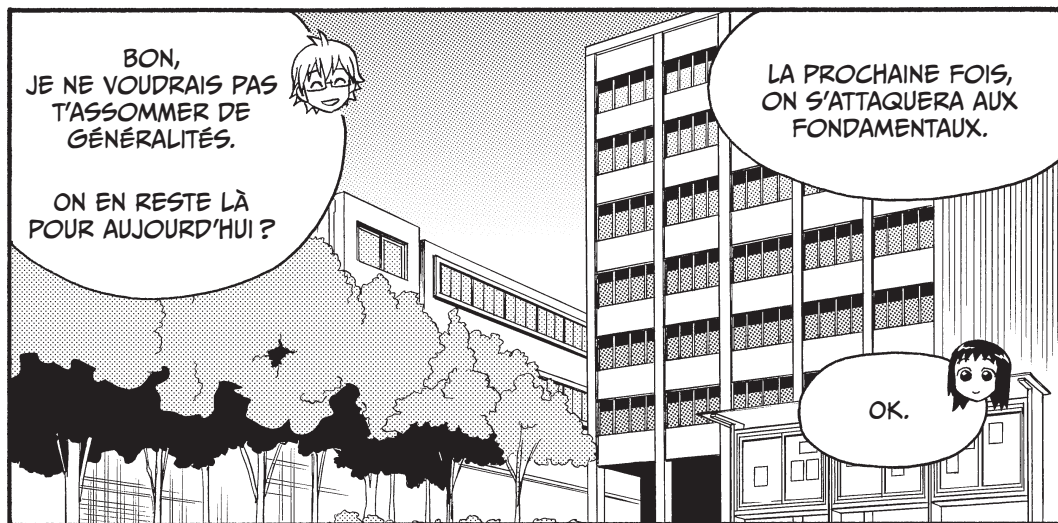






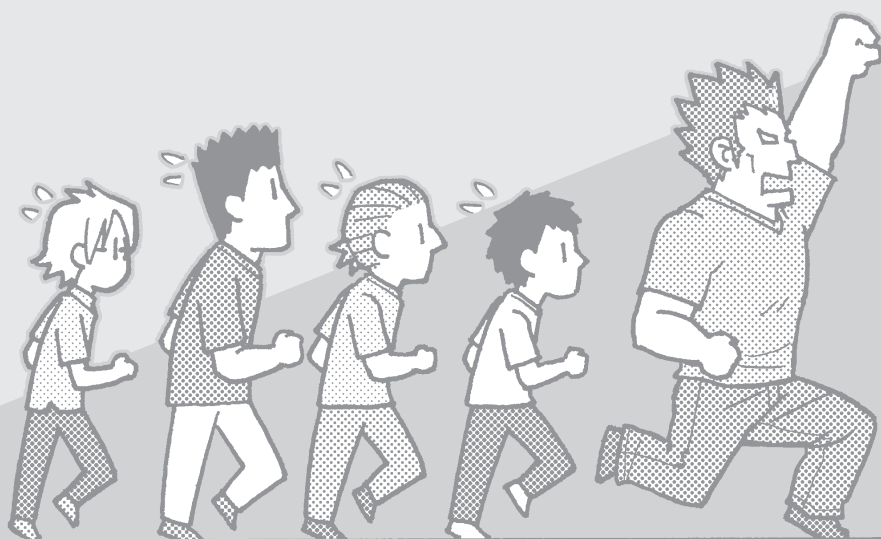




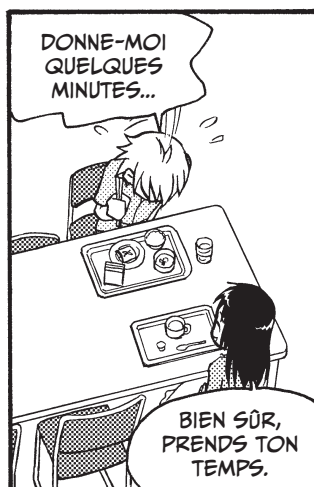
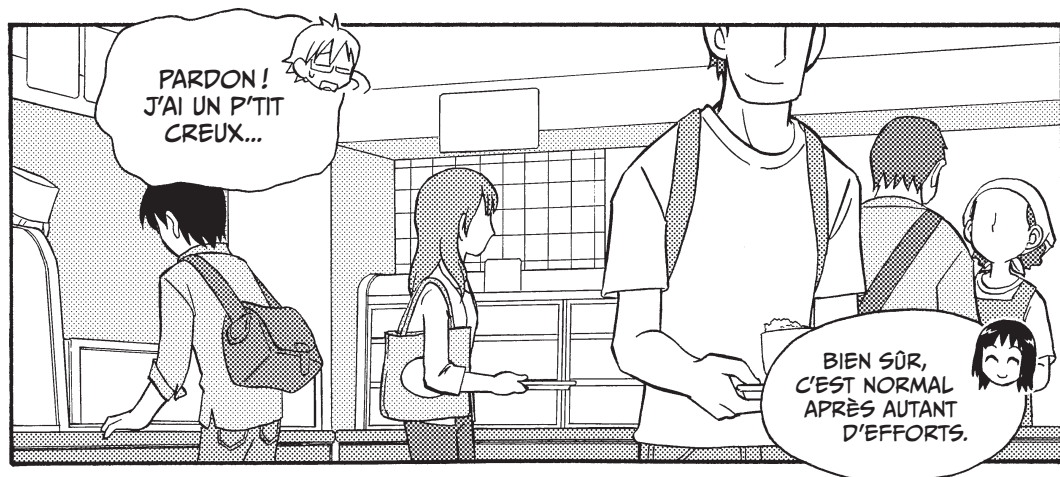
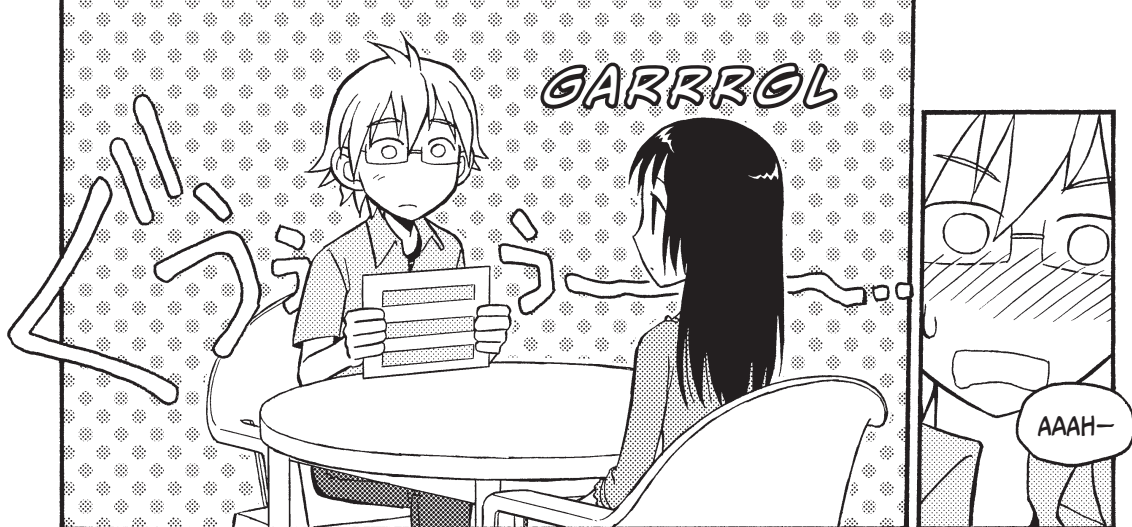


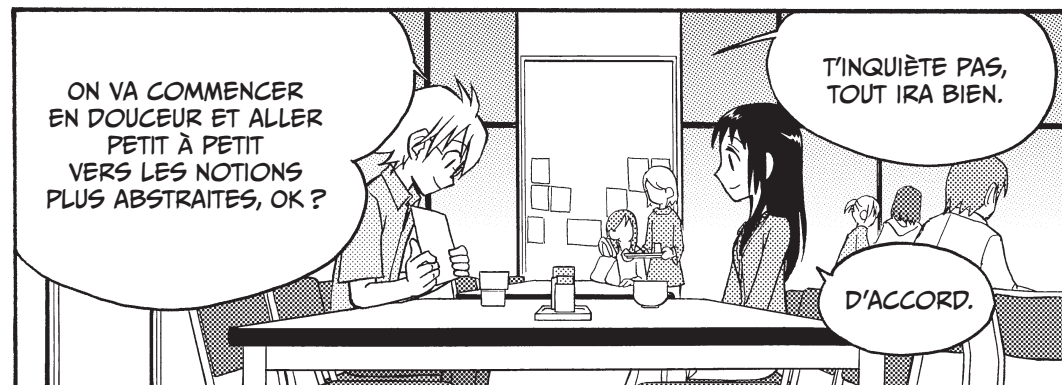
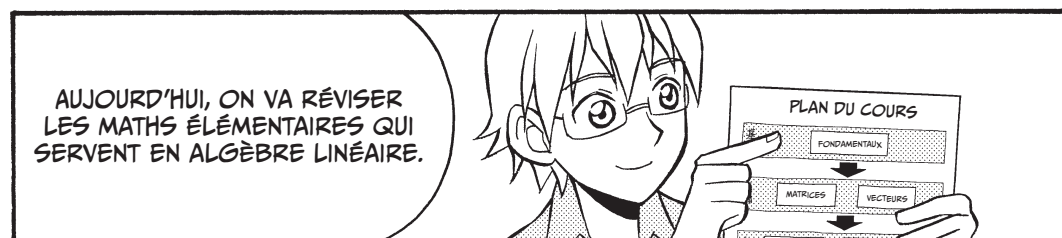
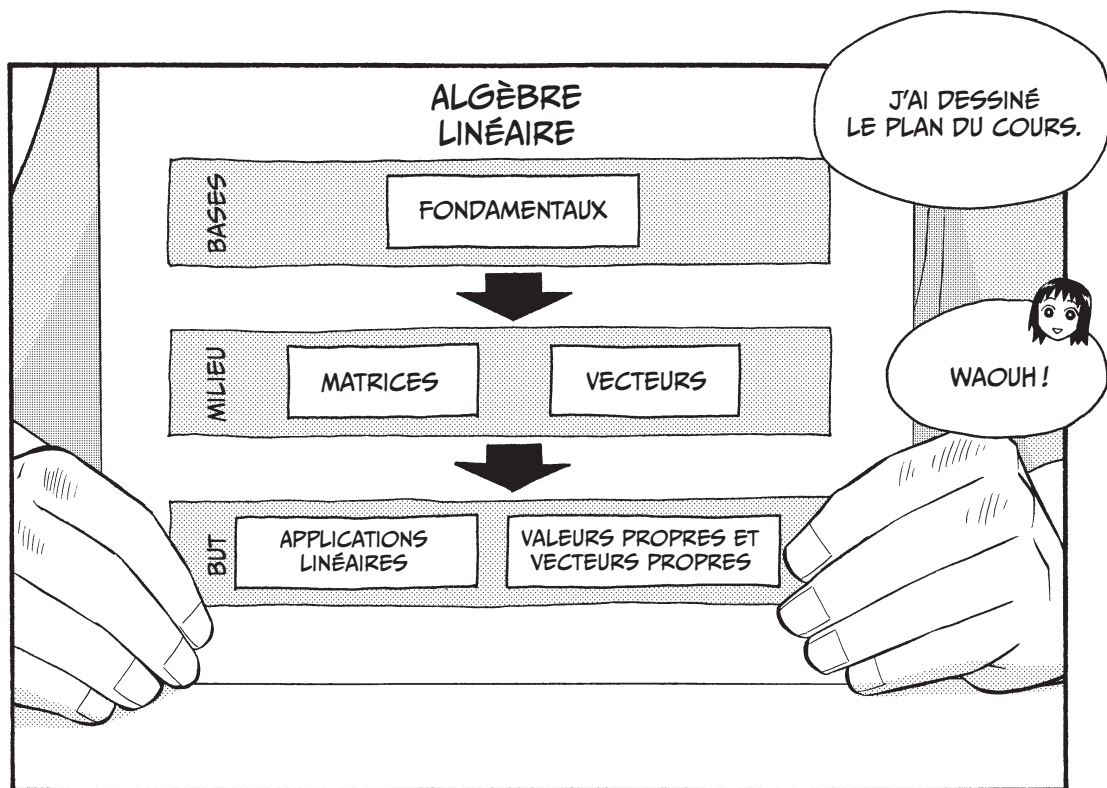
2

LES FONDAMENTAUX











PERMUTATIONS, COMBINAISONS ET ARRANGEMENTS



LE DILEMME DE REIJI

Lorsqu'il se rend au dojo pour son entraînement de karaté, Reiji a le temps d'écouter 3 morceaux de musique pour se mettre dans l'ambiance. Il passe en revue les chansons qu'il possède sur son téléphone : 7 peuvent convenir.

Toujours curieux et l'esprit en éveil, Reiji se demande de combien de manières il peut faire une playlist avec 3 morceaux pris parmi les 7, en n'oubliant pas qu'il faut choisir l'ordre d'écoute. Pouvez-vous l'aider ?

ANALYSE DU PROBLÈME

Reiji a trouvé deux méthodes :

- **méthode 1** : choisir une chanson, l'ajouter à la liste, recommencer deux fois ;
- **méthode 2** : choisir 3 chansons parmi les 7, choisir l'ordre d'écoute des 3 morceaux, puis créer la liste.

Il se demande si l'une de ces méthodes lui offre un plus grand nombre de possibilités que l'autre. Pour le savoir, faisons les calculs.

SOLUTION

Appelons A, B, C, D, E, F et G les 7 chansons possibles.

La méthode 1 donne 210 possibilités

En effet, il y a 7 choix possibles pour la première chanson, 6 pour la deuxième, 5 pour la troisième, et $7 \times 6 \times 5 = 7 \times 30 = 210$.

Dans la méthode 2, il y a 35 façons de choisir 3 morceaux parmi 7

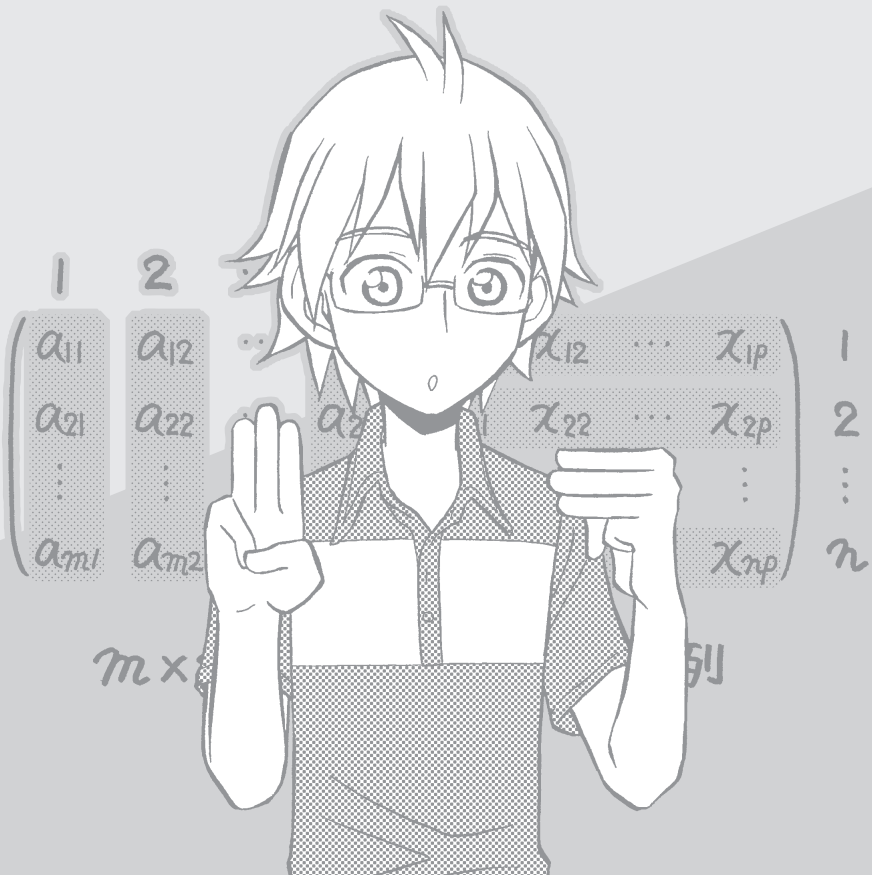
	ABCDEFG
1	x x x
2	x x x
3	x x x
4	x x x
5	x x x
6	x x x
7	x x x
8	x x x
9	x x x
10	x x x
11	x x x
12	x x x
13	x x x
14	x x x
15	x x x

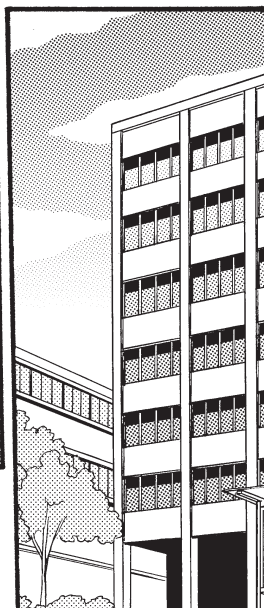
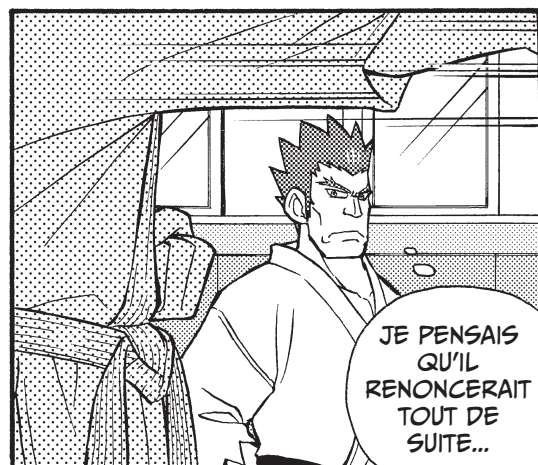
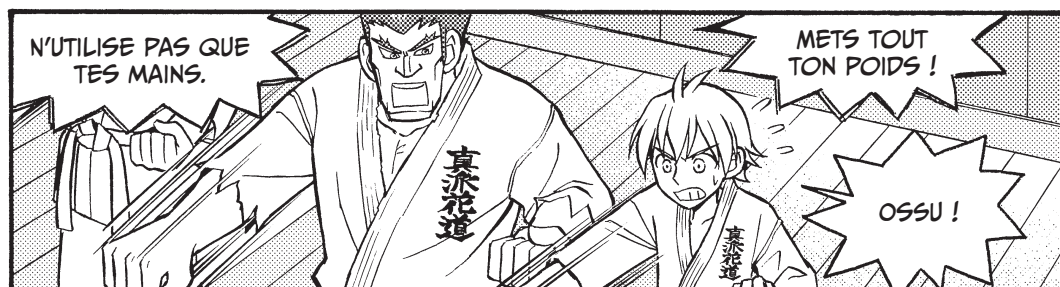
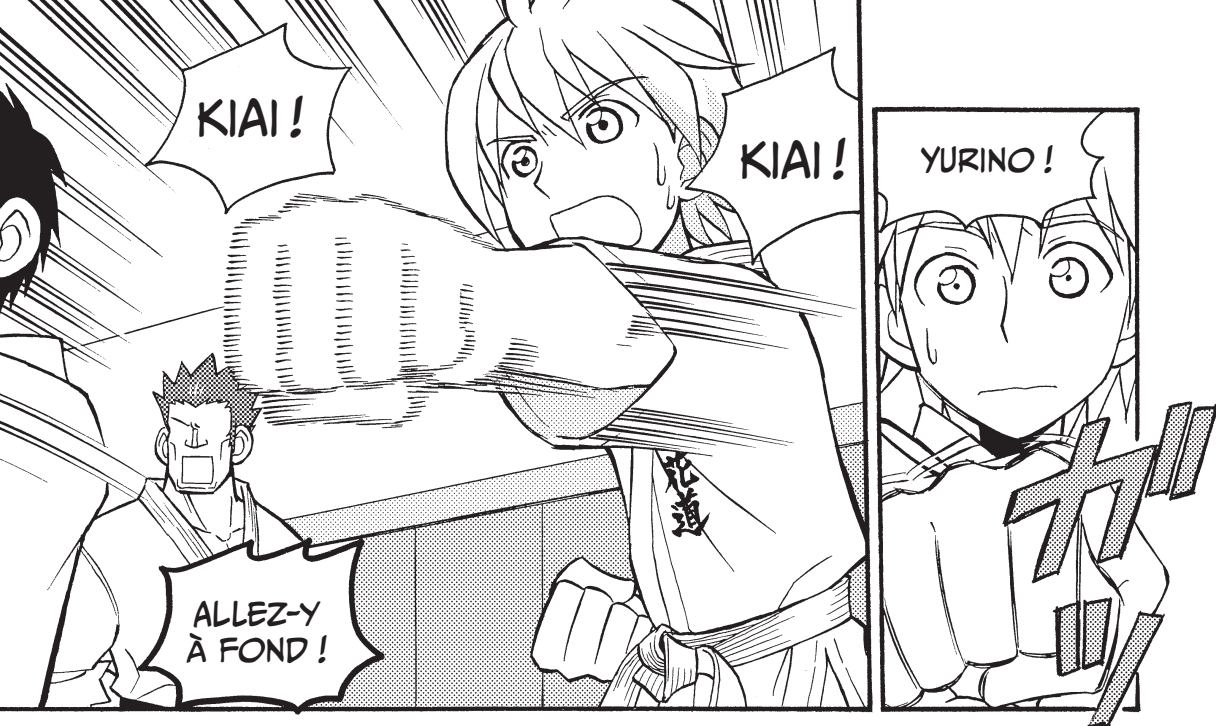
	ABCDEFG
16	x x x
17	x x x
18	x x x
19	x x x
20	x x x
21	x x x
22	x x x
23	x x x
24	x x x
25	x x x

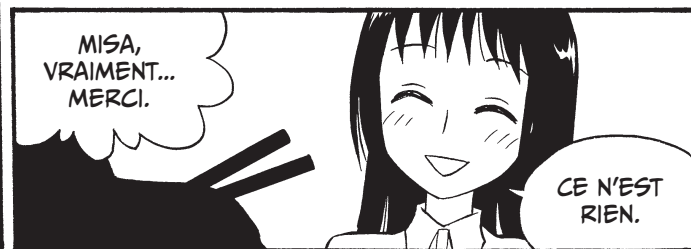
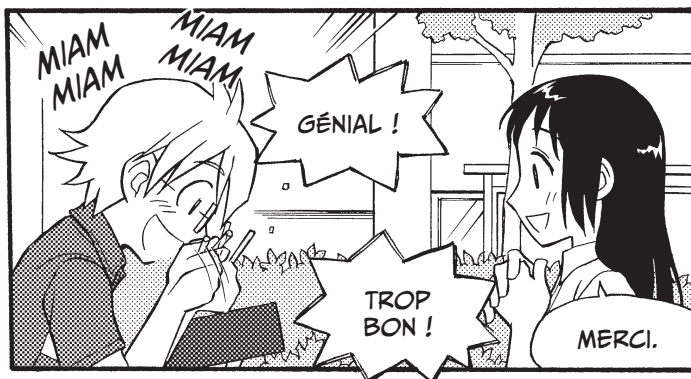
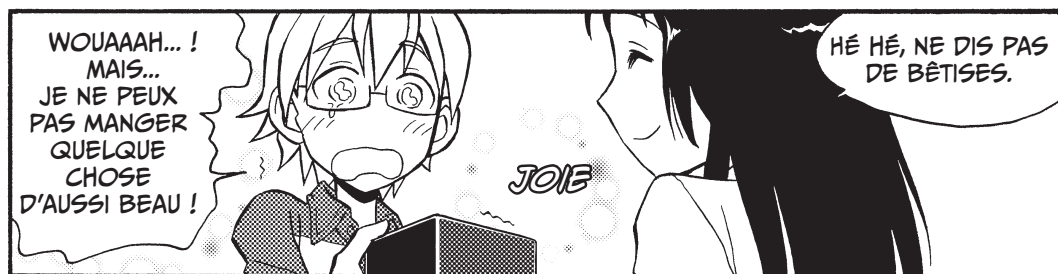
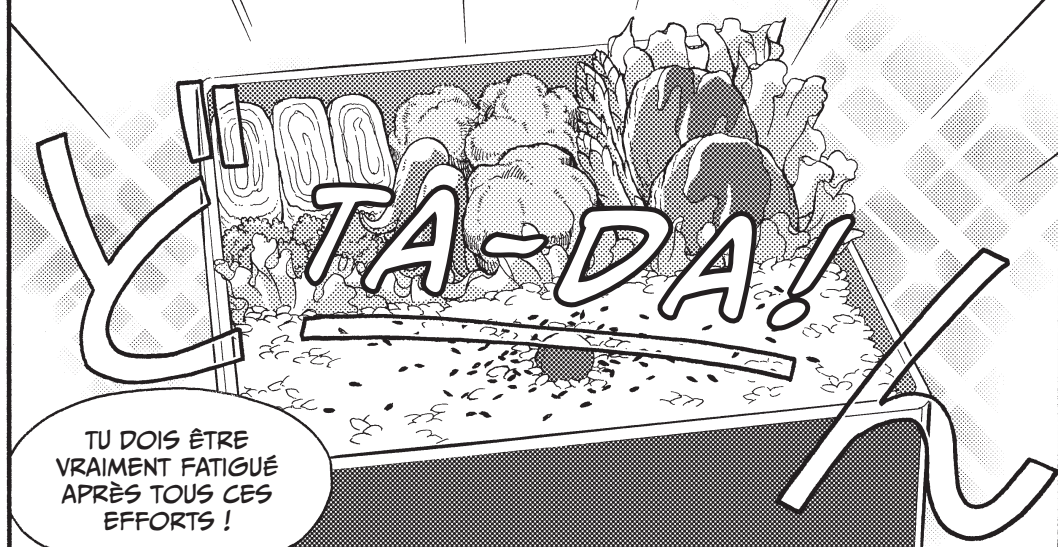
	ABCDEFG
26	x x x
27	x x x
28	x x x
29	x x x
30	x x x
31	x x x
32	x x x
33	x x x
34	x x x
35	x x x

3

INTRODUCTION AUX MATRICES







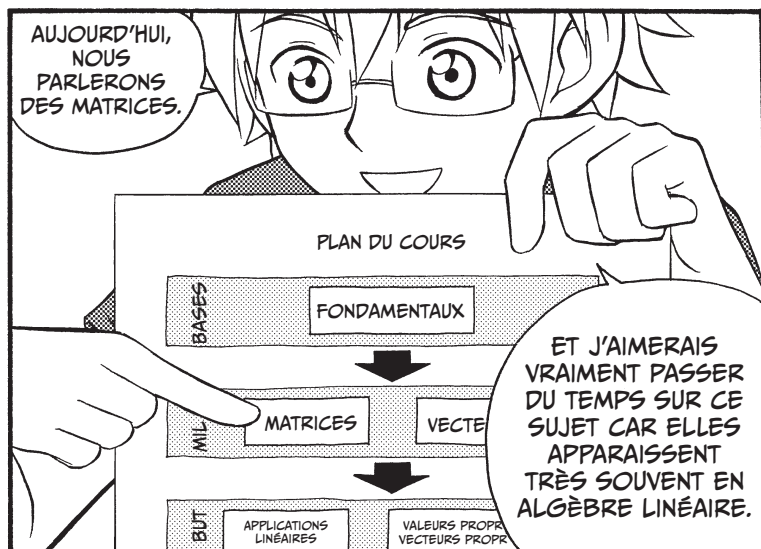


AAAH...



JE ME SENS
BEAUCOUP MIEUX
MAINTENANT.
TU ES PRÊTE À
COMMENCER ?

OUI,
ALLONS-Y.



AUJOURD'HUI,
NOUS
PARLERONS
DES MATRICES.

PLAN DU COURS

BASIS FUNDAMENTALS

MATRICES

VECTORS

BUT

APPLICATIONS
LINÉAIRES

VALEURS PROPRES
VECTEURS PROPRES

ET J'AIMERAI
VRAIMENT PASSER
DU TEMPS SUR CE
SUJET CAR ELLES
APPARAÎSSENT
TRÈS SOUVENT EN
ALGÈBRE LINÉAIRE.



LE DÉBUT NE
DEVRAIT PAS
TE POSER DE
PROBLÈME.

MAIS À LA FIN JE
PARLERAI UN PEU
DES MATRICES
INVERSES,
ET CE N'EST PAS
SI SIMPLE.

OK.

QU'EST-CE QU'UNE
MATRICE ?

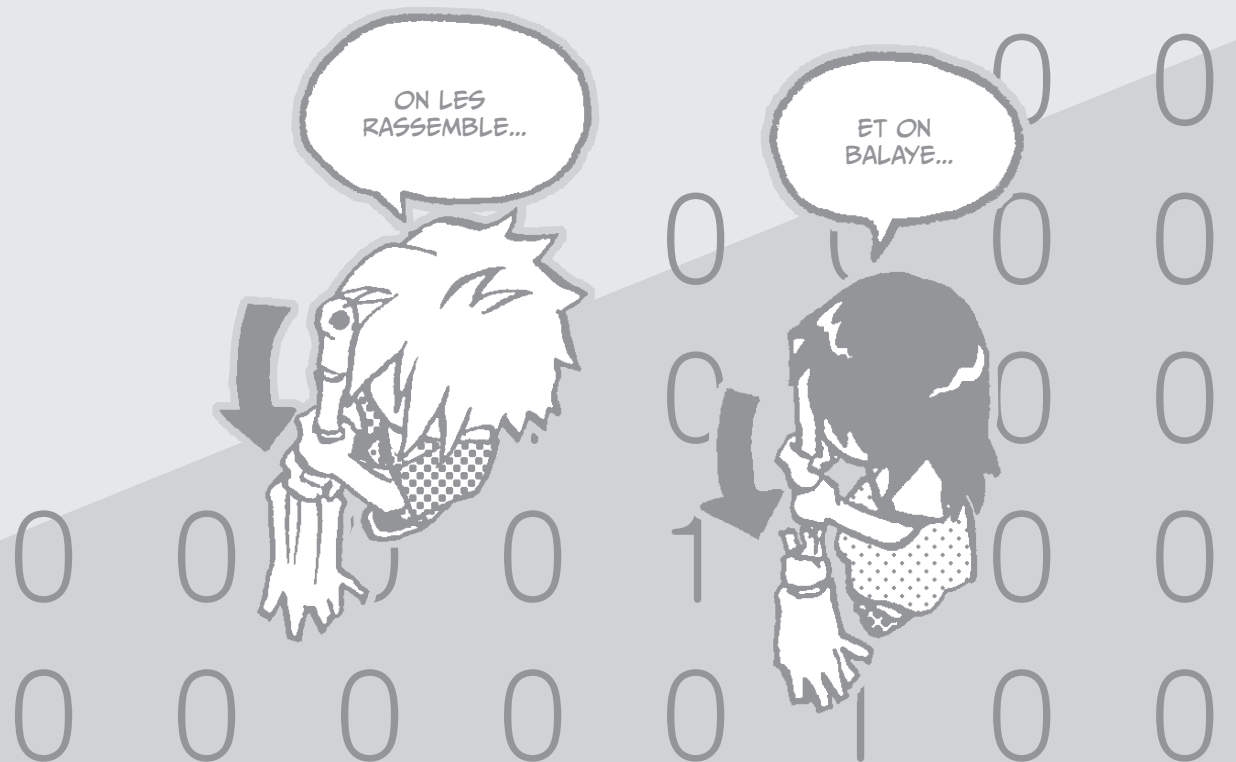
UNE MATRICE EST
UN ENSEMBLE DE
NOMBRES DISPOSÉS
EN m LIGNES
ET n COLONNES,
ENTOURÉ DE
PARENTHÈSES,
COMME CECI.

	COL. 1	COL. 2	...	COL. n
LIGNE 1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
LIGNE 2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
LIGNE m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

CEUX-LÀ
S'APPELLENT
DES INDICES.

4

PLUS DE MATRICES





8 MATRICES INVERSES

Deux matrices sont *inverses* l'une de l'autre si leur produit est la matrice identité.

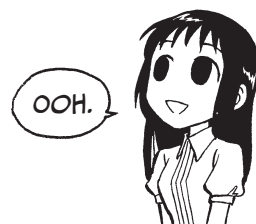
Ainsi, la matrice $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ et la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ sont inverses si

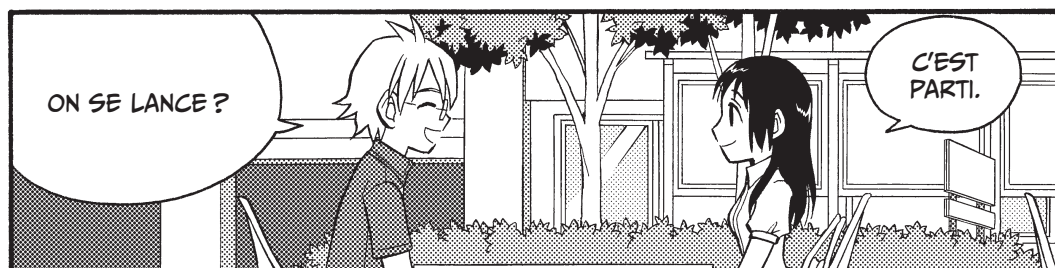
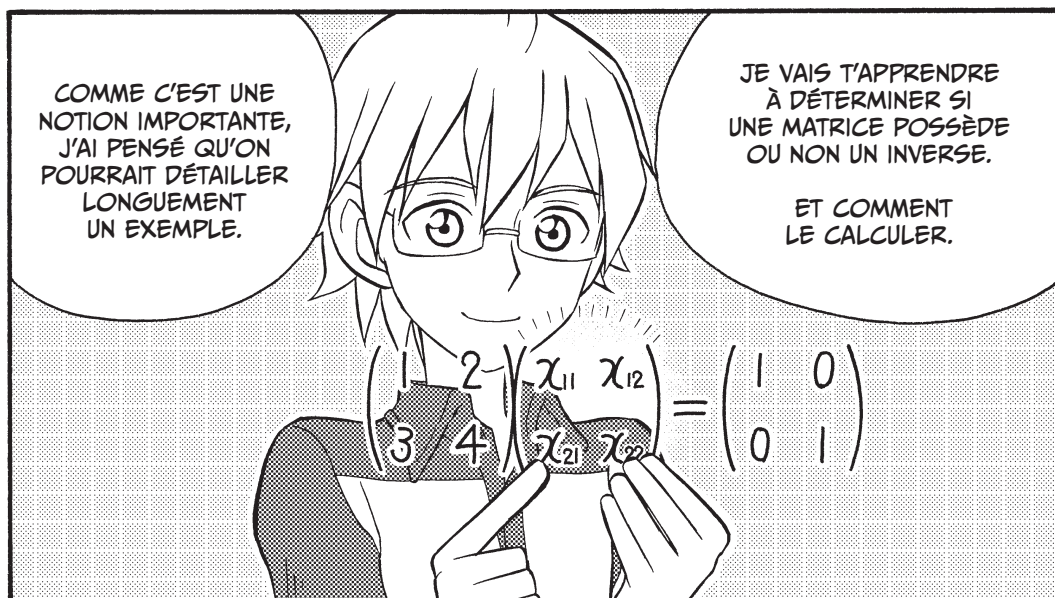
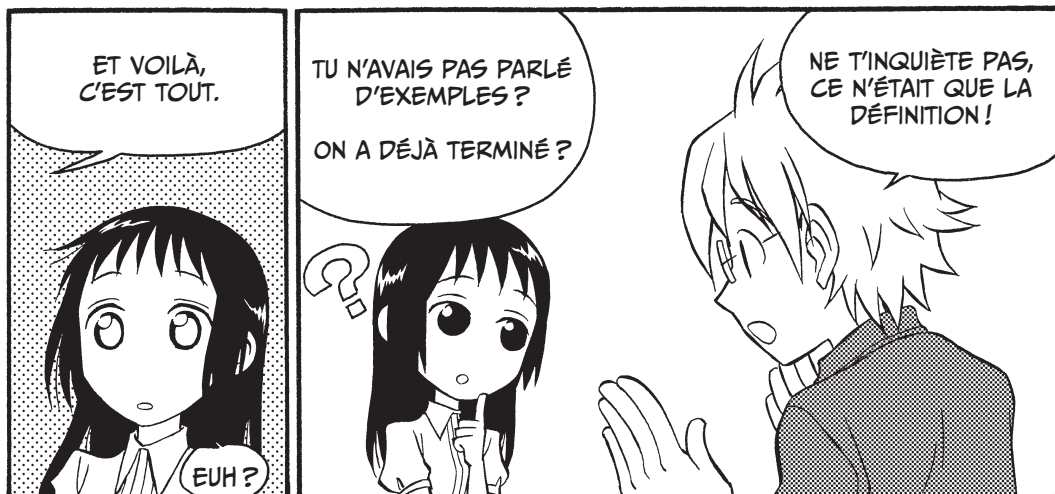
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou si} \quad \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si l'une de ces égalités est vraie, l'autre l'est aussi.

Une matrice est *inversible* s'il existe une matrice dont elle est l'inverse.

Une matrice inversible n'a qu'un seul inverse.





CALCULER UNE MATRICE INVERSE

METHODE DES COFACTEURS

PIVOT DE GAUSS

IL Y A PRINCIPALEMENT DEUX FAÇONS DE CALCULER L'INVERSE D'UNE MATRICE : PAR LES COFACTEURS ET PAR LE PIVOT DE GAUSS.

PIVOT DE GAUSS

LA MÉTHODE DES COFACTEURS NÉCESSITE DES CALCULS QUI PEUVENT VITE DEVENIR FASTIDIEUX...

~~MÉTHODE DES COFACTEURS~~

IGNORE-LA TANT QUE TU N'EN AS PAS BESOIN POUR UN EXAMEN.

ÇA ME VA.

~~METHODE DES COFACTEURS~~

ÇA ME
VA.

EN REVANCHE,
LE PIVOT DE
GAUSS EST
SIMPLE À
COMPRENDRE
ET À
APPLIQUER.

C'EST AUSSI
SIMPLE QUE
DE PASSER
LE BALAI !*

DE TOUTE FAÇON, JE NE PARLERAI PAS DES COFACTEURS AUJOURD'HUI.

COMPRIS.

LE PIVOT DE
GAUSS SERT AUSSI
À RÉSOUDRE
DES SYSTÈMES
LINÉAIRES.

VOYONS CELA.

COOL!

? PROBLÈME

Résoudre le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 = 1 \\ 1x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

! SOLUTION

LA MÉTHODE USUELLE	LA MÉTHODE USUELLE ÉCRITE AVEC DES MATRICES	PIVOT MATRICIEL
$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 = 1 \\ 1x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ Multiplier par 2 l'équation du haut.	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ OK.
$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 = 2 \\ 1x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ Soustraire l'équation du bas à celle du haut.	$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ GROUPEZ, BALAYER.
$\begin{cases} 5x_1 + 0x_2 = 2 \\ 1x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ Multiplier par 5 l'équation du bas.	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} 5x_1 + 0x_2 = 2 \\ 5x_1 + 10x_2 = 0 \end{cases}$ Soustraire l'équation du haut à celle du bas.	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 5 & 10 & 0 \end{pmatrix}$ GROUPEZ, BALAYER.
$\begin{cases} 5x_1 + 0x_2 = 2 \\ 0x_1 + 10x_2 = -2 \end{cases}$ Diviser l'équation du haut par 5 et celle du bas par 10.	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & -2 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 = \frac{2}{5} \\ 0x_1 + 1x_2 = -\frac{1}{5} \end{cases}$ Terminé !	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ TERMINÉ !

DONC ON FAIT LES CALCULS USUELS, MAIS ON LES ÉCRIT SOUS FORME MATRICIELLE ?

EH BIEN...

OUI, ET L'OBJECTIF EST DE TRANSFORMER CETTE PARTIE ICI EN UNE MATRICE IDENTITÉ.

HUM...



CALCULER ET UTILISER DES DÉTERMINANTS



CALCULER UN DÉTERMINANT GRÂCE AUX COFACTEURS

Le déterminant d'une matrice peut s'obtenir en calculant des déterminants de matrices plus petites. Le *mineur* $A_{i,j}$ d'une matrice A à l'indice (i,j) est le déterminant de la matrice qui se déduit de A en enlevant sa ligne i et sa colonne j . Par exemple :

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ alors } A_{2,3} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \square \\ \square & \square & \square \\ -2 & 0 & \square \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Le *cofacteur* à l'indice (i,j) est $C_{i,j} = (-1)^{i+j} A_{i,j}$. Le résultat important est que le déterminant de A est égal à la somme des $a_{i,j} C_{i,j}$ le long de n'importe quelle ligne ou colonne de A . Par exemple, développons $\det A$ le long de la première colonne :

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \times \begin{vmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} \square & 0 & 0 \\ \square & \square & \square \\ \square & 0 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \times \begin{vmatrix} \square & 0 & 0 \\ \square & 1 & -1 \\ \square & \square & \square \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= [1 \times 3 - 0 \times (-1)] - [0 \times 3 - 0 \times 0] - 2[0 \times (-1) - 1 \times 0] \\ \det A &= 3 \end{aligned}$$

Si on observe la matrice A , on constate que c'est plutôt le long de la première ligne qu'il est judicieux de développer $\det A$ puisque les coefficients $a_{1,2}$ et $a_{1,3}$ sont nuls :

$$\det A = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

On peut calculer ce déterminant 2×2 par la formule usuelle des déterminants 2×2 , mais aussi en le développant par rapport à la première colonne, ce qui fournit le résultat sans aucun calcul.

Remarquons que cette construction récursive des déterminants permet de retrouver les formules pour les matrices 2×2 et 3×3 sans faire intervenir les permutations :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \times \begin{vmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{vmatrix} - c \times \begin{vmatrix} \square & b \\ \square & \square \end{vmatrix} = ad - cb$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \times \begin{vmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{vmatrix} - d \times \begin{vmatrix} \square & b & c \\ \square & \square & \square \end{vmatrix} + g \times \begin{vmatrix} \square & b & c \\ \square & e & f \end{vmatrix}$$

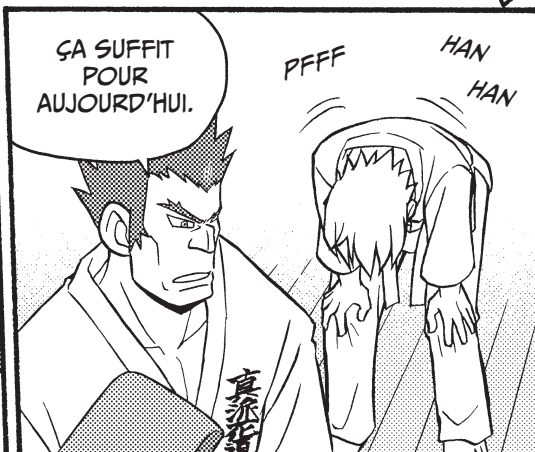
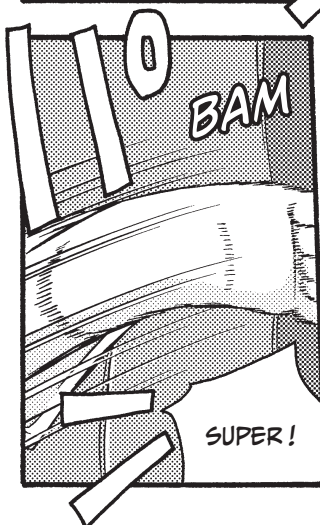
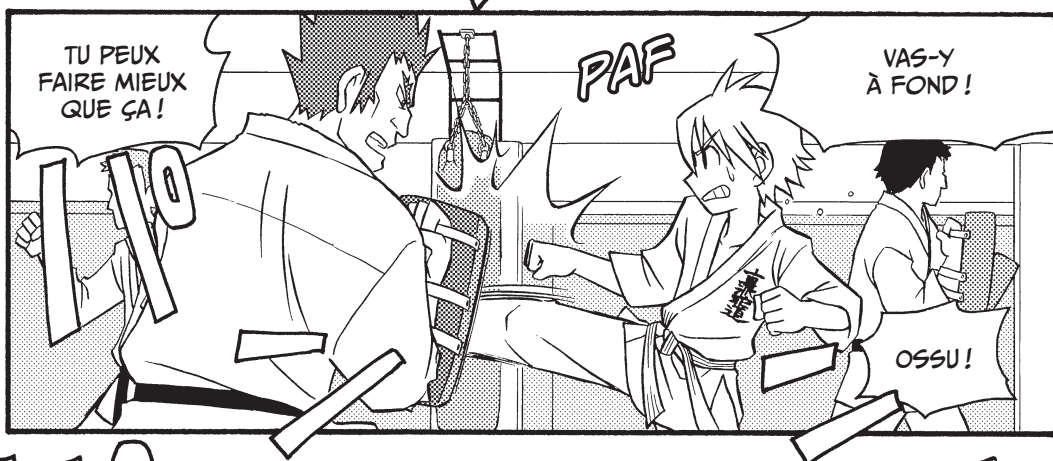
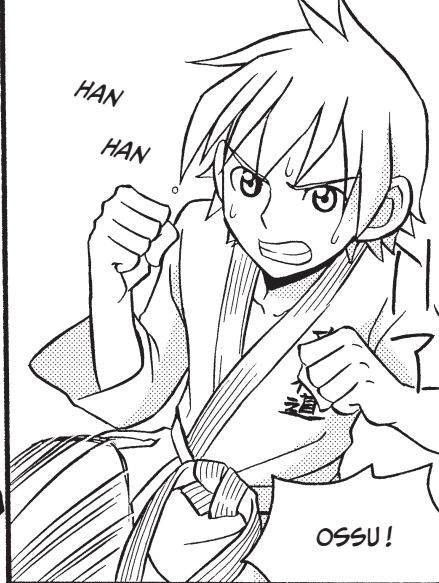
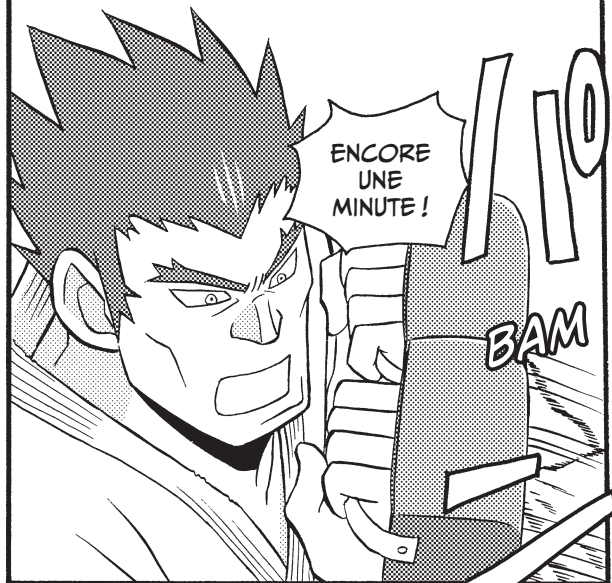
$$\begin{aligned} &= a(ei - hf) - d(bi - hc) + g(bf - ec) \\ &= aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb \end{aligned}$$

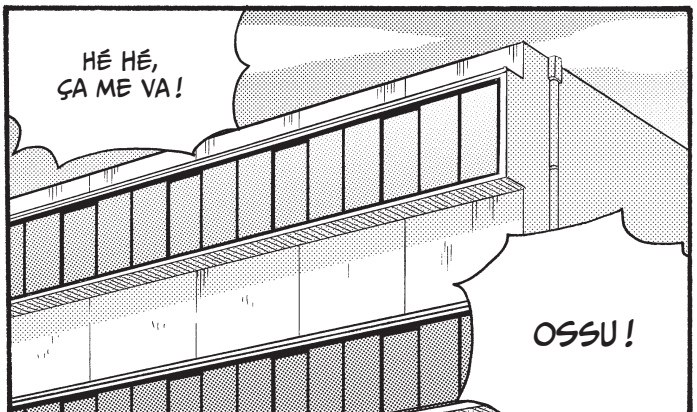
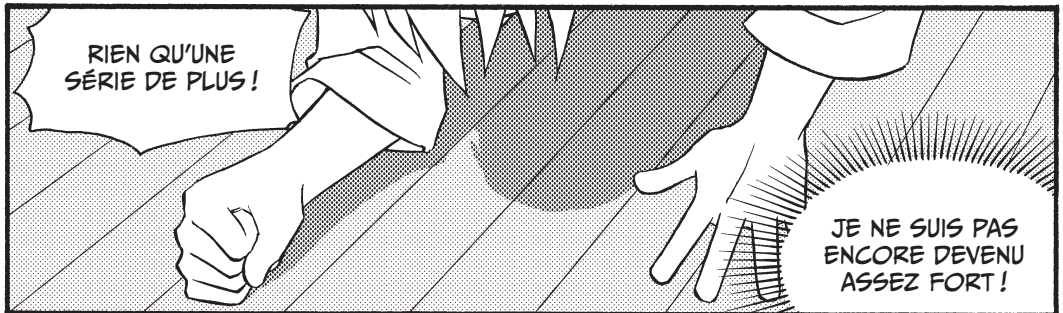
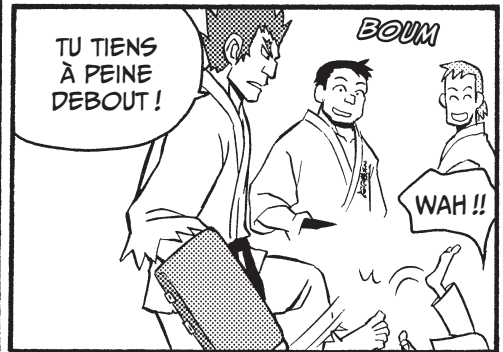
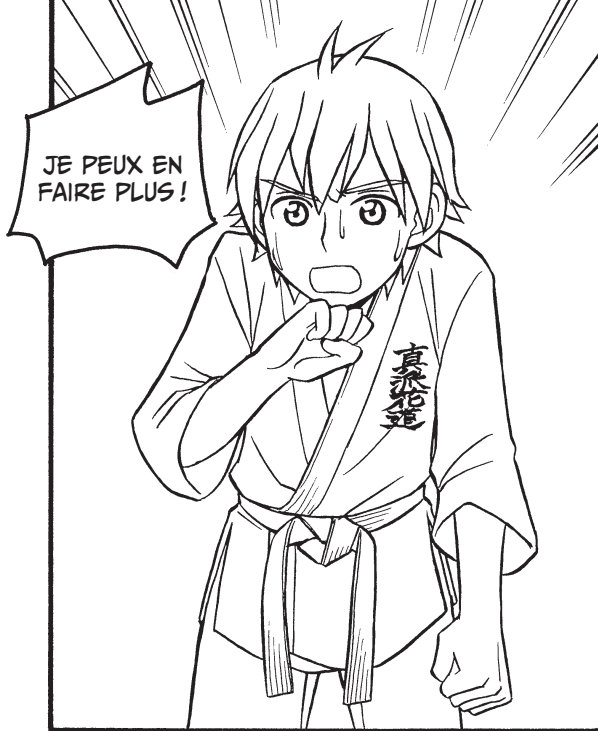
(règle de Sarrus)

5

INTRODUCTION AUX VECTEURS

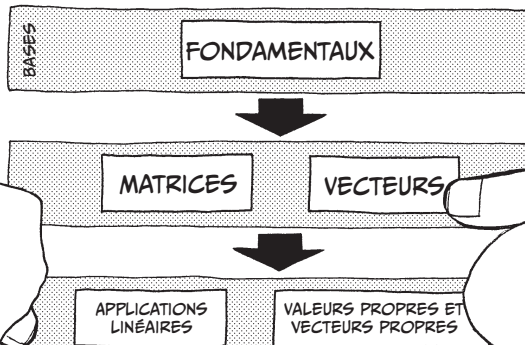




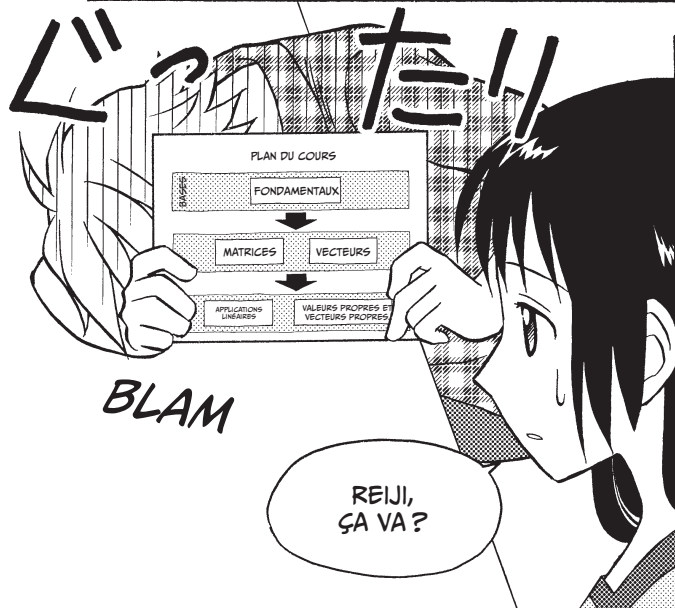


AUJOURD'HUI,
ON VA PARLER
DES VECTEURS.

SOIS TRÈS ATTENTIVE
CAR ILS APPARAISSENT
SOUVENT EN ALGÈBRE
LINÉAIRE.



D'ACCORD !



TU PRÉFÈRES
QU'ON SE
VOIE DEMAIN ?

NON NON,
ÇA VA.

LAISSE-MOI
JUSTE CINQ
MINUTES POUR
DIGÉRER CE
DÉLICIEUX
REPAS,
ET JE SERAI
D'ATTAQUE !

QUE SONT LES
VECTEURS ?

5 MINUTES
PLUS TARD

DÉSOLÉ.
PRÊTE ?

RESSUSCITÉ

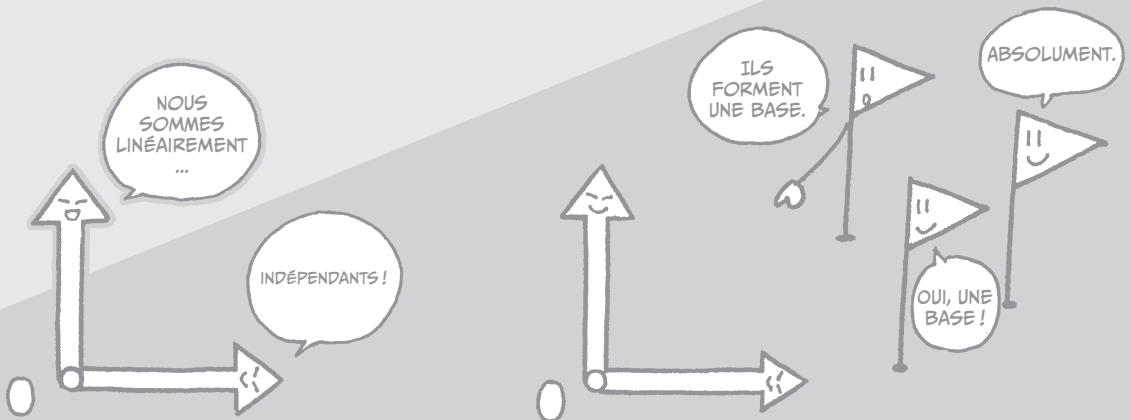
PARLONS DES
VECTEURS !

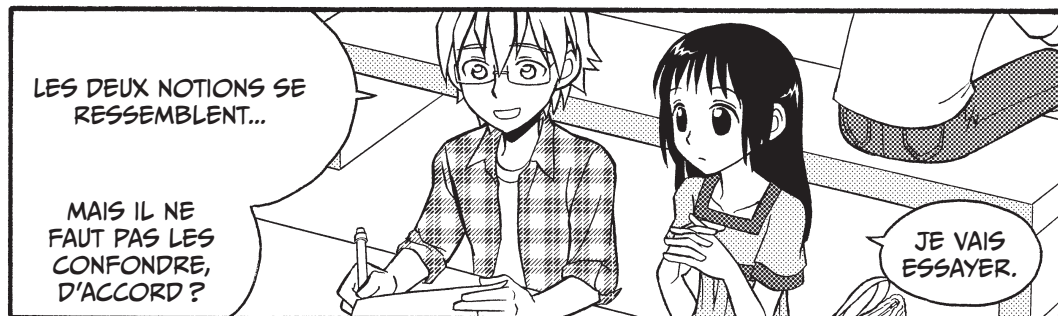
LES VECTEURS NE
SONT À VRAI DIRE
QU'UNE MANIÈRE DE
VOIR LES MATRICES.

VRAIMENT ?

6

PLUS DE VECTEURS





INDÉPENDANCE LINÉAIRE



? PROBLÈME 1

Trouver des constantes c_1 et c_2
qui vérifient l'équation :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



C'EST FACILE.

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

EXACT !

? PROBLÈME 2

Trouver des constantes c_1 et c_2 qui vérifient l'équation :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ALORS,
DEUXIÈME
QUESTION.



ÇA NE SERAIT PAS
ENCORE

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} ?$$

C'EST
BIEN ÇA.

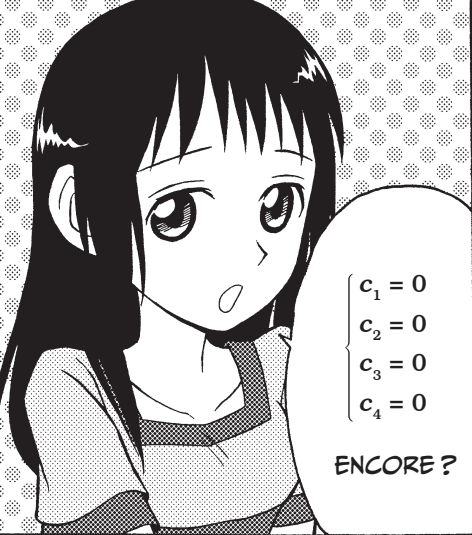
? PROBLÈME 3

Trouver des constantes c_1, c_2, c_3 et c_4 qui vérifient l'équation :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

DERNIÈRE
QUESTION.

...



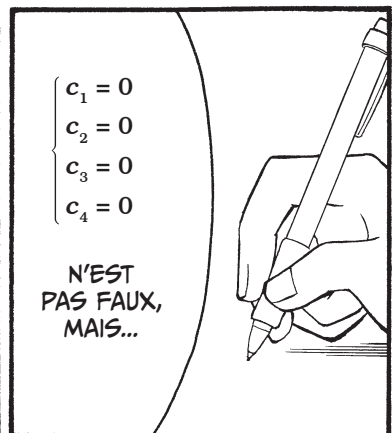
$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \end{cases}$$

ENCORE ?



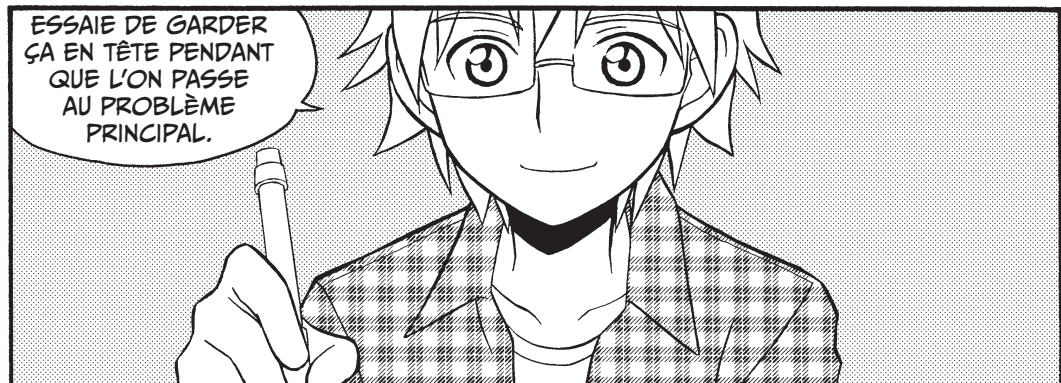
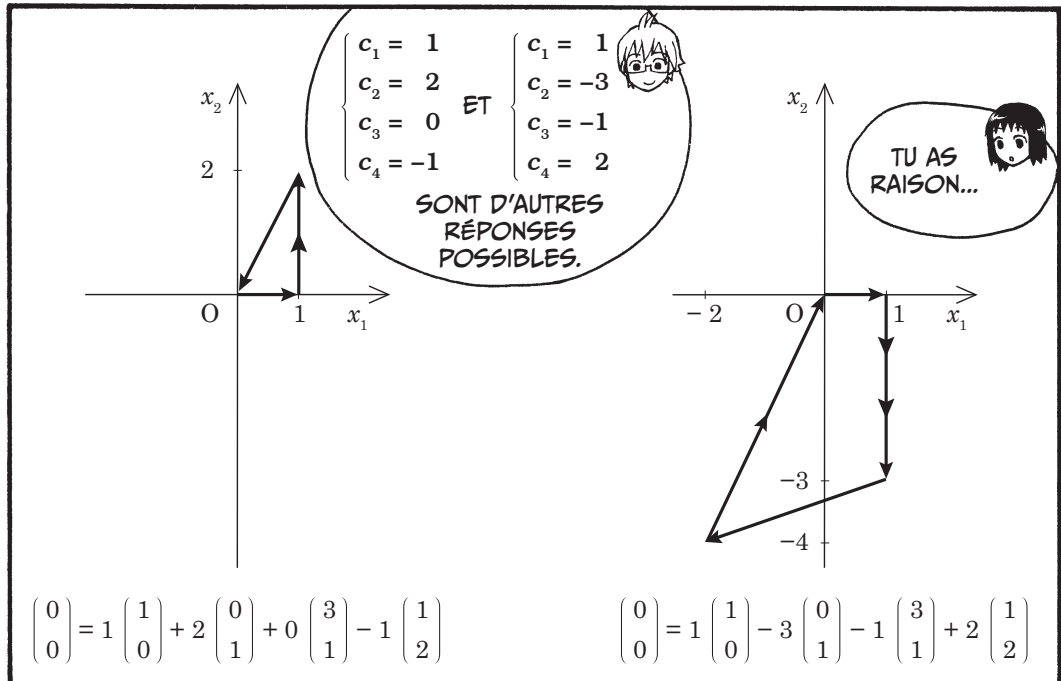
PAS TOUT
À FAIT.

?



$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \end{cases}$$

N'EST
PAS FAUX,
MAIS...



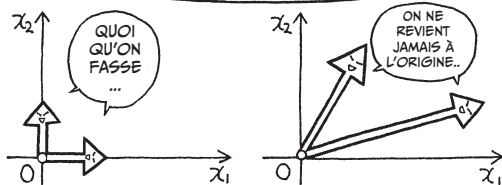
ESSAIE DE GARDER
ÇA EN TÊTE PENDANT
QUE L'ON PASSE
AU PROBLÈME
PRINCIPAL.

QUAND IL N'Y A QU'UNE
SEULE SOLUTION

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ \vdots \\ c_n = 0 \end{cases}$$

À L'ÉQUATION

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$



INDÉPENDANCE LINÉAIRE

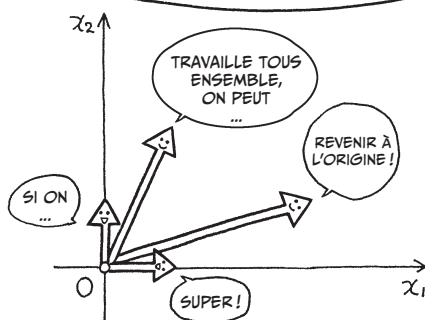
ON DIT QUE LES VECTEURS

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \text{ ET } \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

SONT LINÉAIREMENT
INDÉPENDANTS.

QUAND IL Y A D'AUTRES
SOLUTIONS QUE

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ \vdots \\ c_n = 0 \end{cases}$$



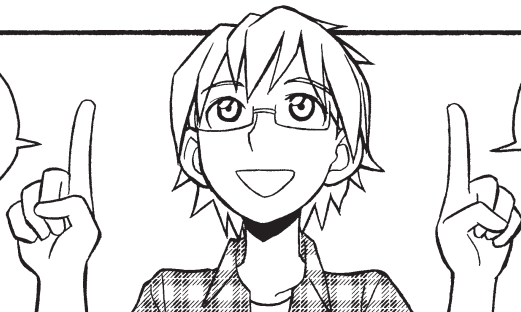
DÉPENDANCE LINÉAIRE

ON DIT QUE LES VECTEURS

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \text{ ET } \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

SONT LINÉAIREMENT
DÉPENDANTS.

UNE FAMILLE
DE VECTEURS
LINÉAIREMENT
INDÉPENDANTS EST
DITE LIBRE...



UNE FAMILLE
DE VECTEURS
LINÉAIREMENT
DÉPENDANTS EST
DITE LIÉE...

AH...

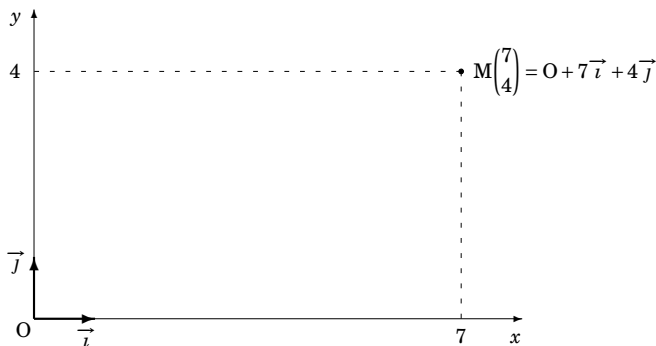




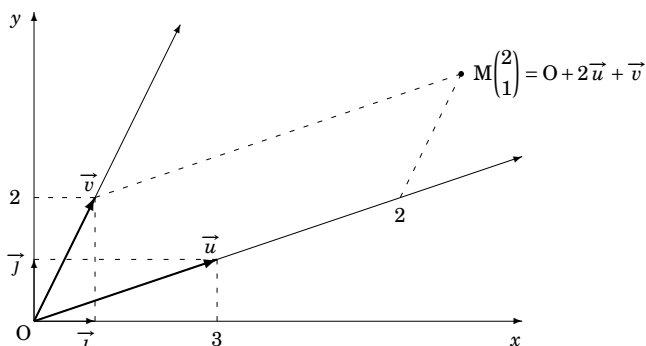
PRODUITS DE VECTEURS



Au lycée, on travaille souvent dans « le plan » vu comme un ensemble de points, muni d'un repère composé d'une origine O et de deux vecteurs $\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La famille $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthogonale car $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, et normée car $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$; on dit qu'elle est orthonormée. Tout point du plan est alors déterminé par son abscisse et son ordonnée :



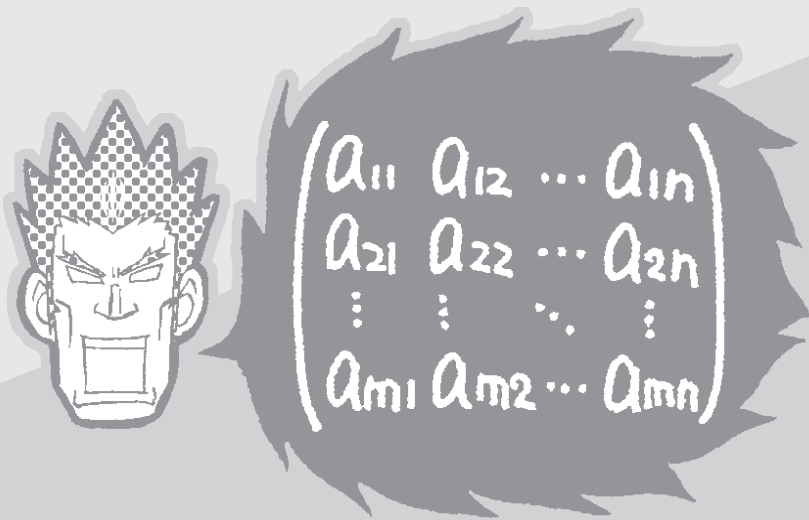
Cependant, on peut aussi munir le plan d'un repère « tordu », avec des vecteurs non orthogonaux et de normes différentes, tant que ces vecteurs sont linéairement indépendants. Considérons par exemple le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

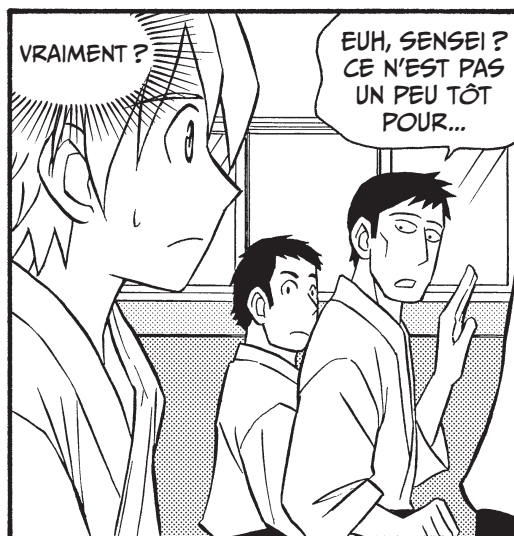
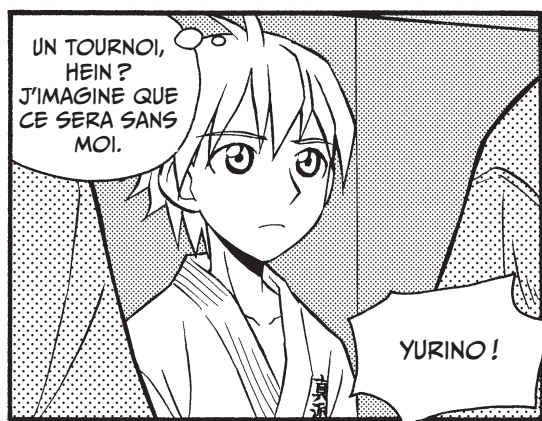
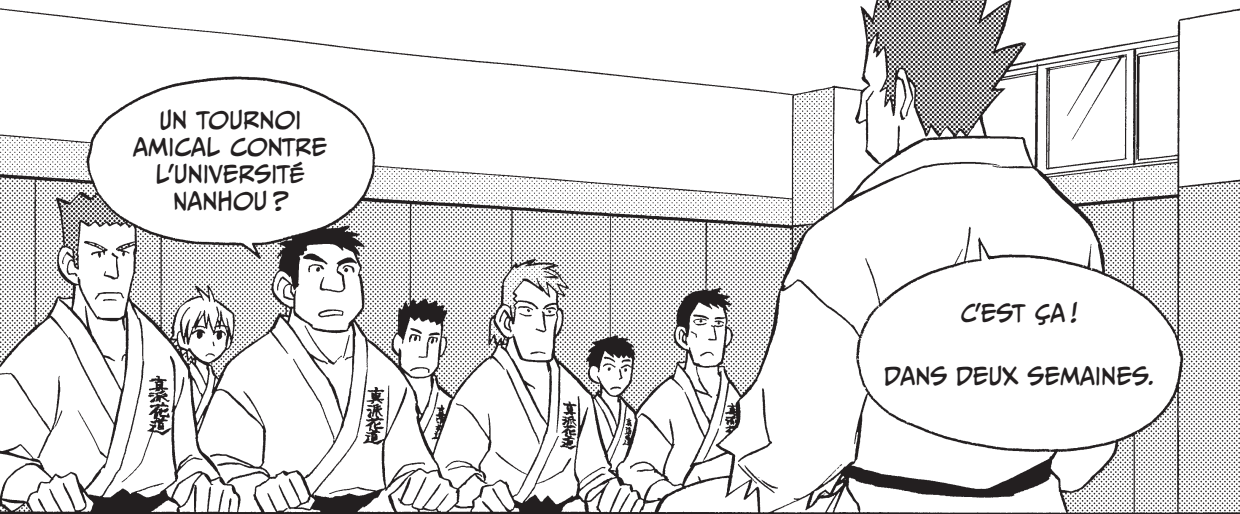


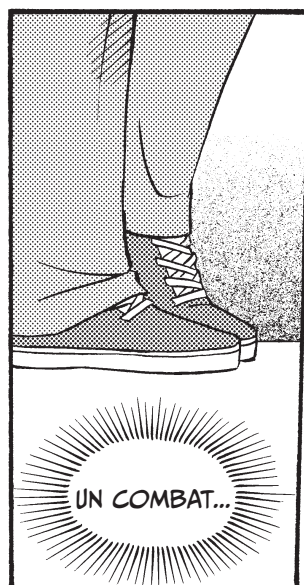
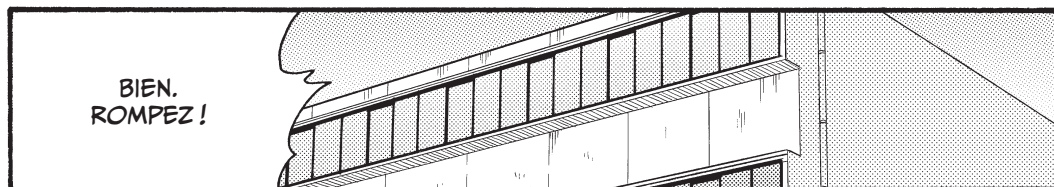
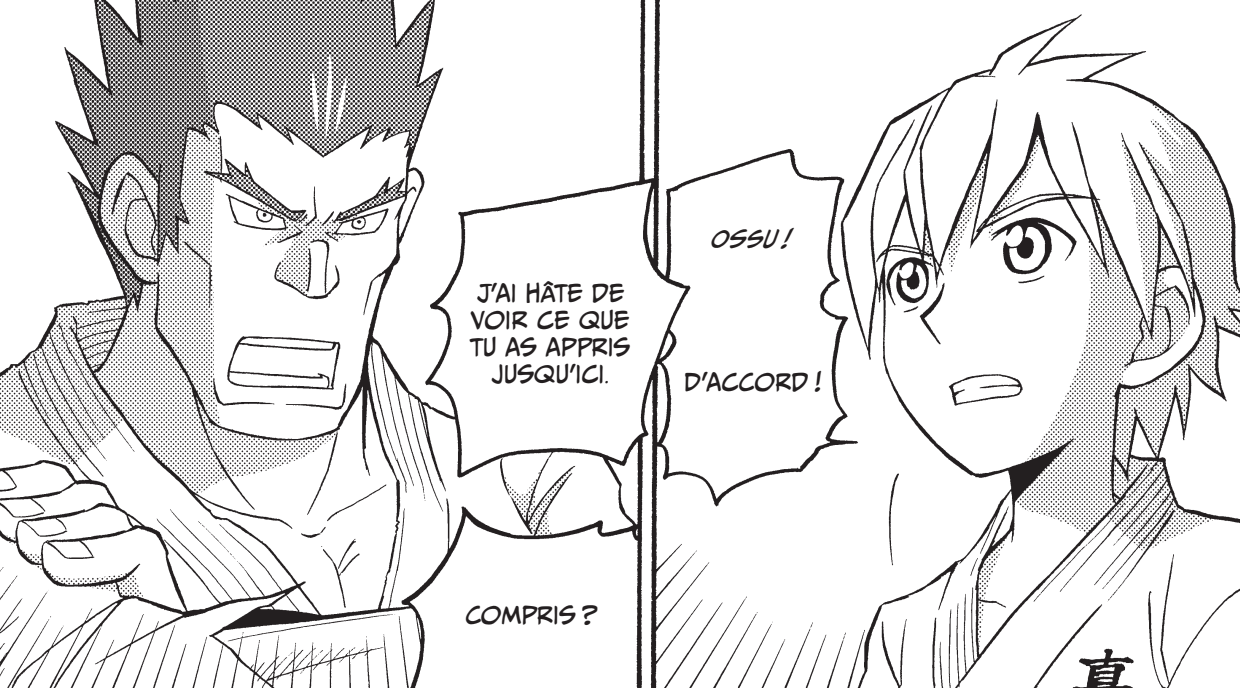
Le point M a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $(O; \vec{u}, \vec{v})$, ce qui revient bien au même puisque $2\vec{u} + \vec{v} = 2(3\vec{i} + \vec{j}) + (\vec{i} + 2\vec{j}) = 7\vec{i} + 4\vec{j}$.

7

APPLICATIONS LINÉAIRES







QU'EST-CE QU'UNE
APPLICATION LINÉAIRE ?

NOUS SOMMES
ENFIN ARRIVÉS
AUX APPLICATIONS
LINÉAIRES !

PLAN DU COURS

FONDAMENTAUX

MATRICES

VECTEURS

APPLICATIONS
LINÉAIRES

VALEURS PROPRES ET
VECTEURS PROPRES

COMMENÇONS PAR
LA DÉFINITION.

TRÈS BIEN.

ON A ABORDÉ
LE SUJET AU
CHAPITRE 2.

OUAIS...

APPLICATIONS LINÉAIRES

Une fonction f d'un ensemble X dans un ensemble Y est une *application linéaire* de X dans Y si elle satisfait les deux conditions suivantes pour tous x_i et x_j dans X et pour tout réel c :

- ① $f(x_i) + f(x_j) = f(x_i + x_j)$
- ② $f(cx_i) = cf(x_i)$

APPLIQUONS
CETTE
DÉFINITION
AVEC $\mathbb{R}^n$.



RELATIONS ET ENSEMBLES REMARQUABLES



APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES

Applications linéaires et matrices sont des objets très différents : on a d'un côté des fonctions vérifiant certaines règles, et de l'autre des tableaux de nombres. Pourtant, le lien entre les deux est si fort que bien souvent, on emploie indifféremment l'un ou l'autre. Commençons par voir comment et pourquoi associer une matrice à une application linéaire.

D'UNE APPLICATION LINÉAIRE À SA MATRICE

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, considérons la similitude s de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle 45° : c'est la composée de la rotation (de centre O) d'angle 45° et de l'homothétie de rapport $\sqrt{2}$. Géométriquement, on voit que

$$\begin{cases} s(\vec{i}) = \vec{i} + \vec{j} \\ s(\vec{j}) = -\vec{i} + \vec{j} \end{cases}$$

Traduisons-le avec des coordonnées :

$$s\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prenons maintenant un vecteur $\vec{x}$ quelconque du plan. On sait qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j}$ car $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Pour calculer l'image de $\vec{x}$ par s , on utilise la linéarité de s :

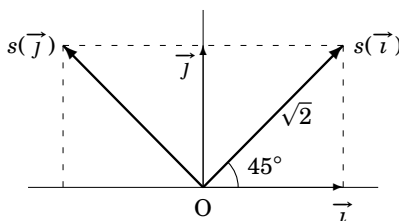
$$s(\vec{x}) = s(a\vec{i} + b\vec{j}) = as(\vec{i}) + bs(\vec{j})$$

soit, avec des coordonnées,

$$s\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

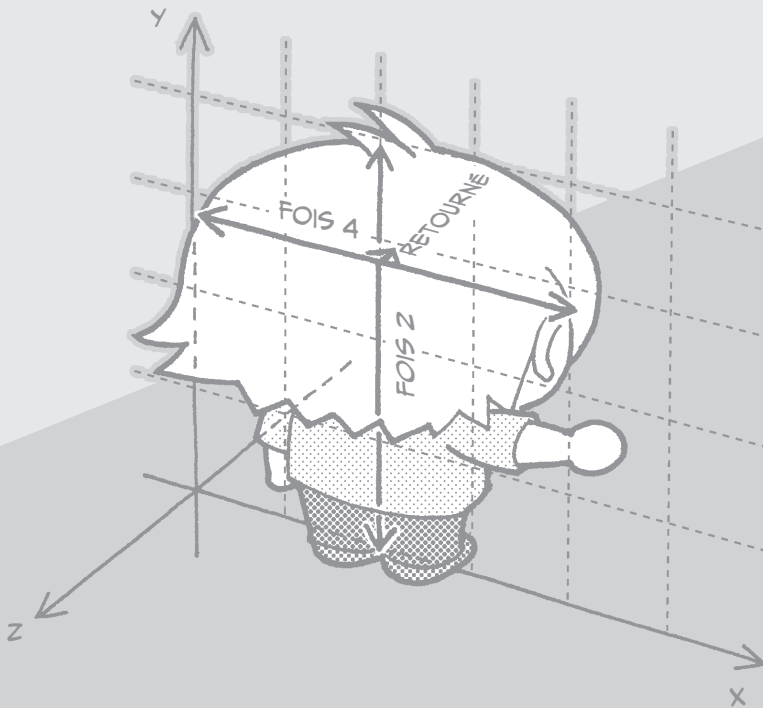
On constate que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ caractérisent complètement s : pour calculer l'image par s d'un vecteur quelconque, il suffit de multiplier ses coordonnées par ces vecteurs et d'additionner. Au lieu d'associer s à la liste de ces deux vecteurs, on peut réunir ces derniers dans une matrice $M(s)$ dont ils sont les colonnes :

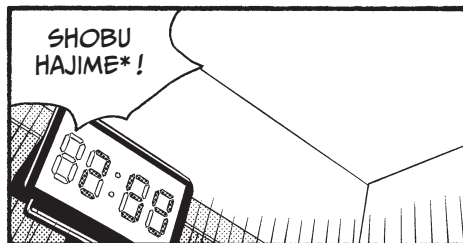
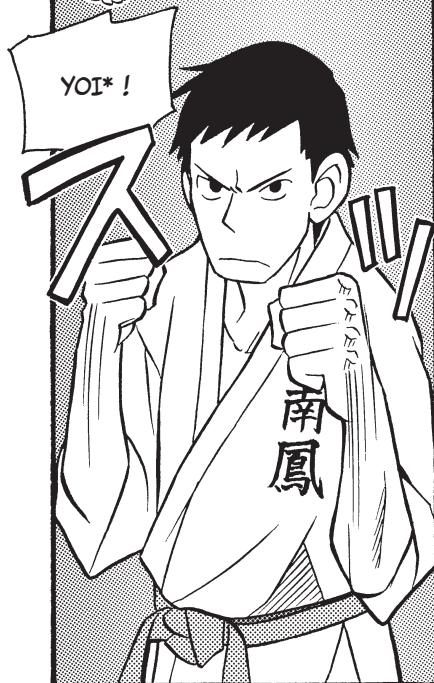
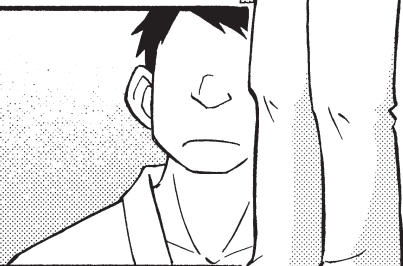
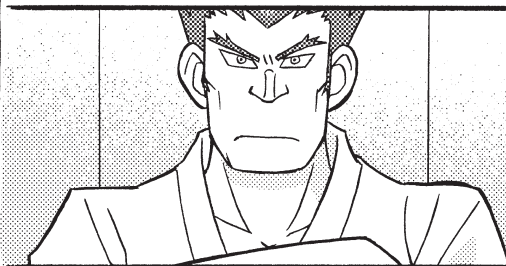
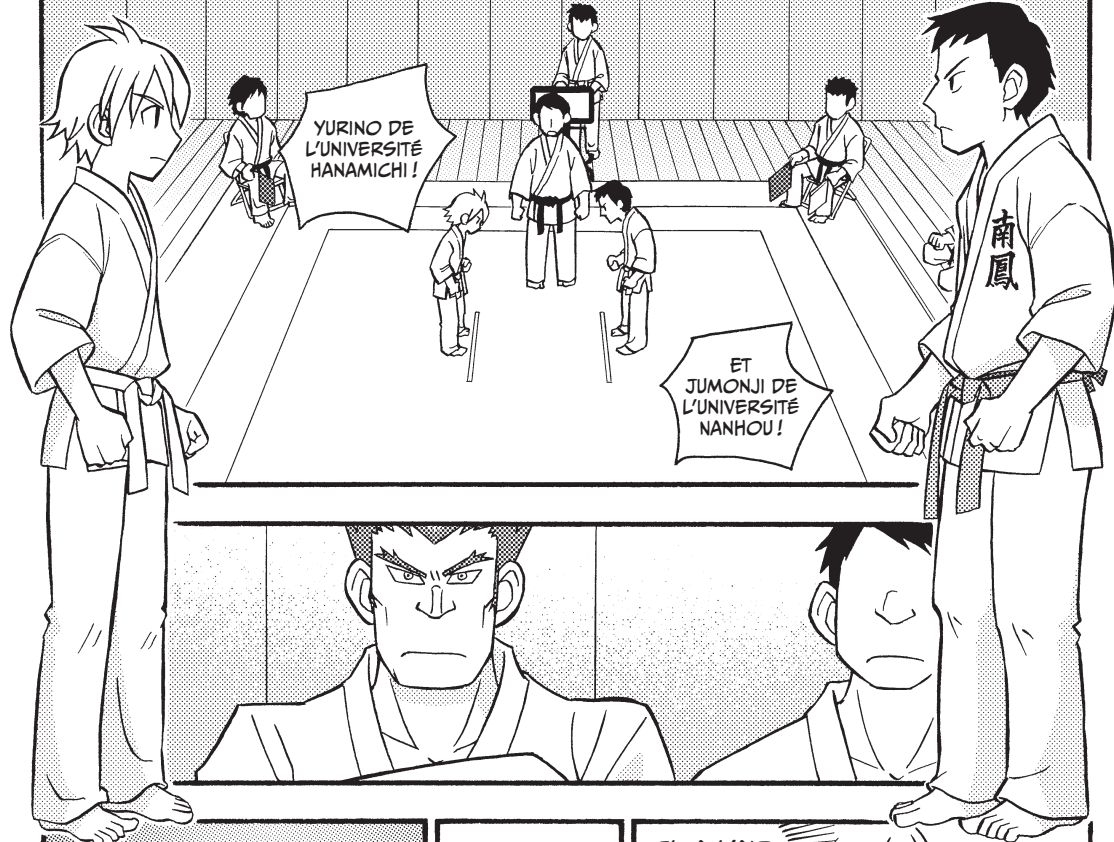
$$M(s) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



8

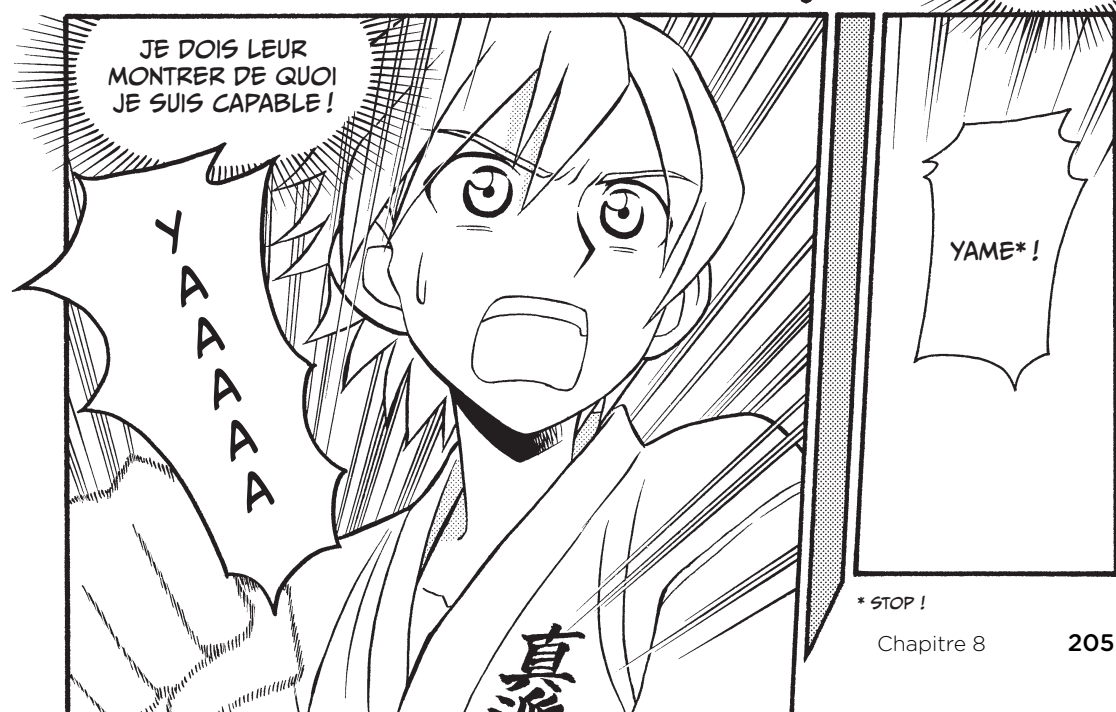
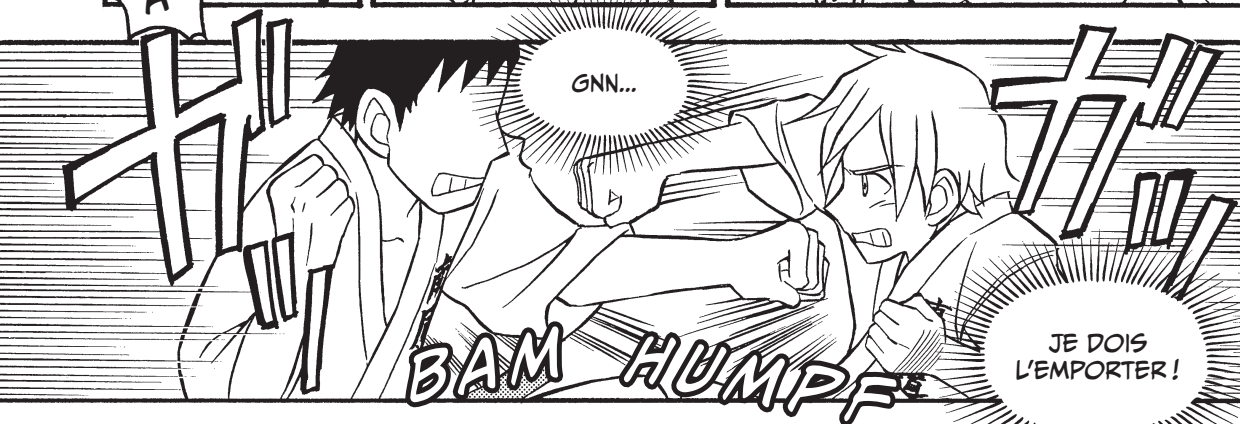
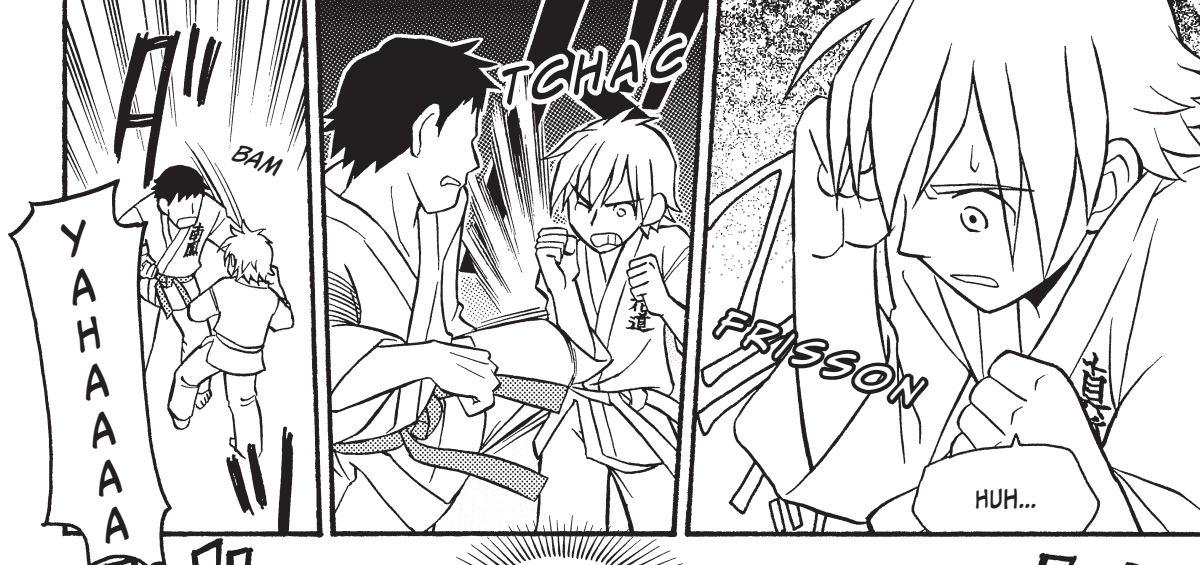
VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES



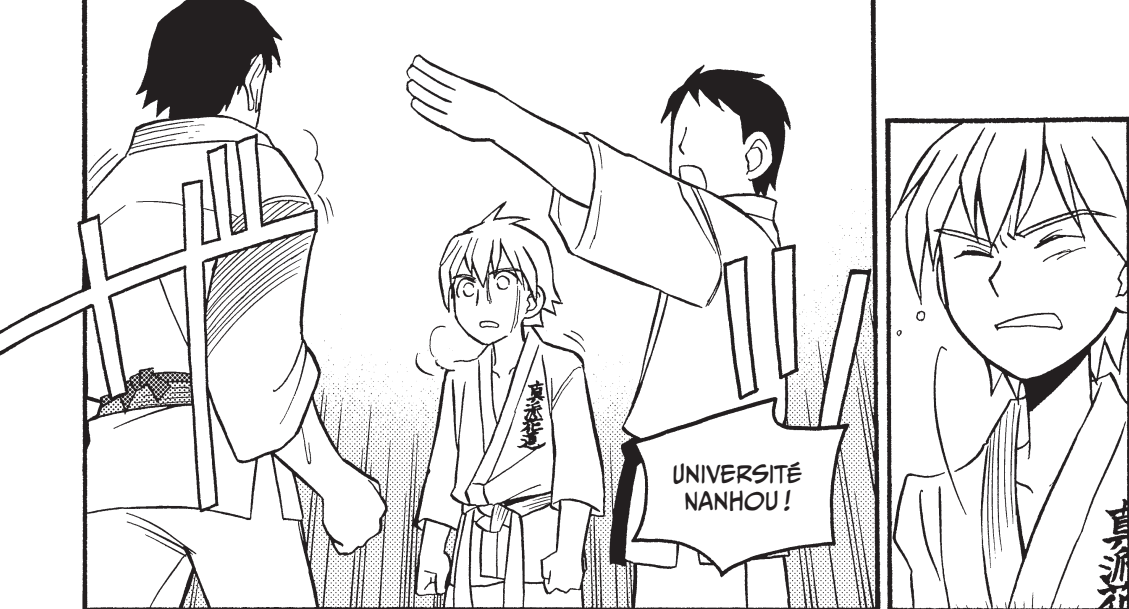


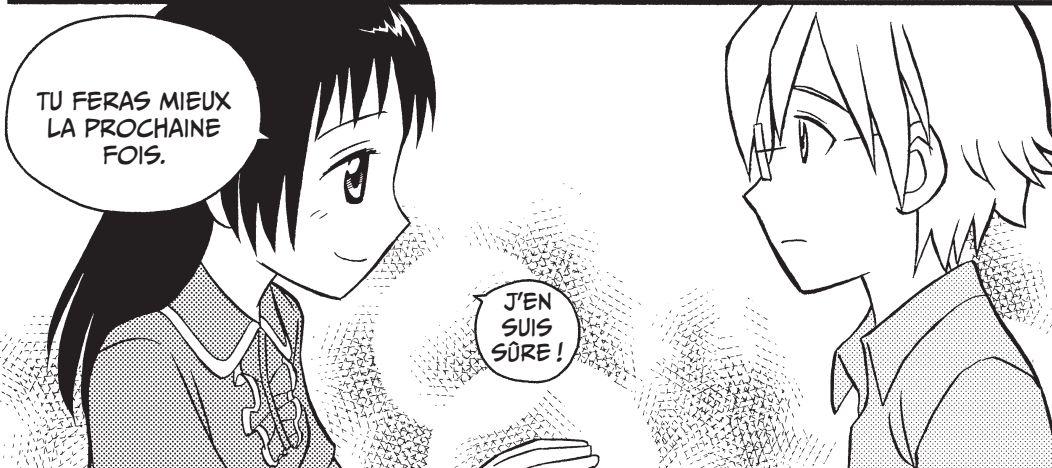
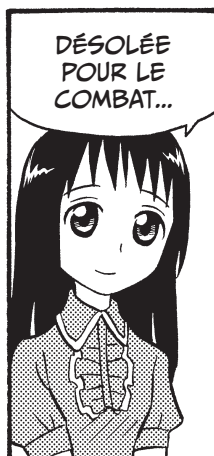
* PRÉPAREZ-VOUS !

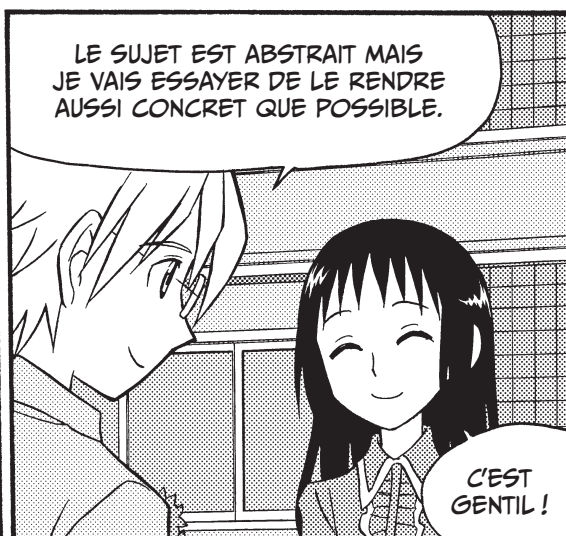
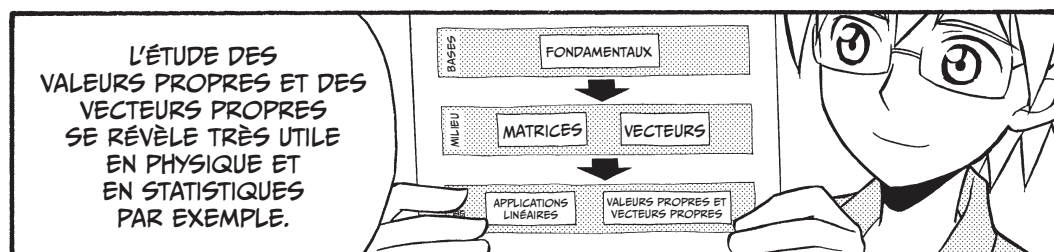
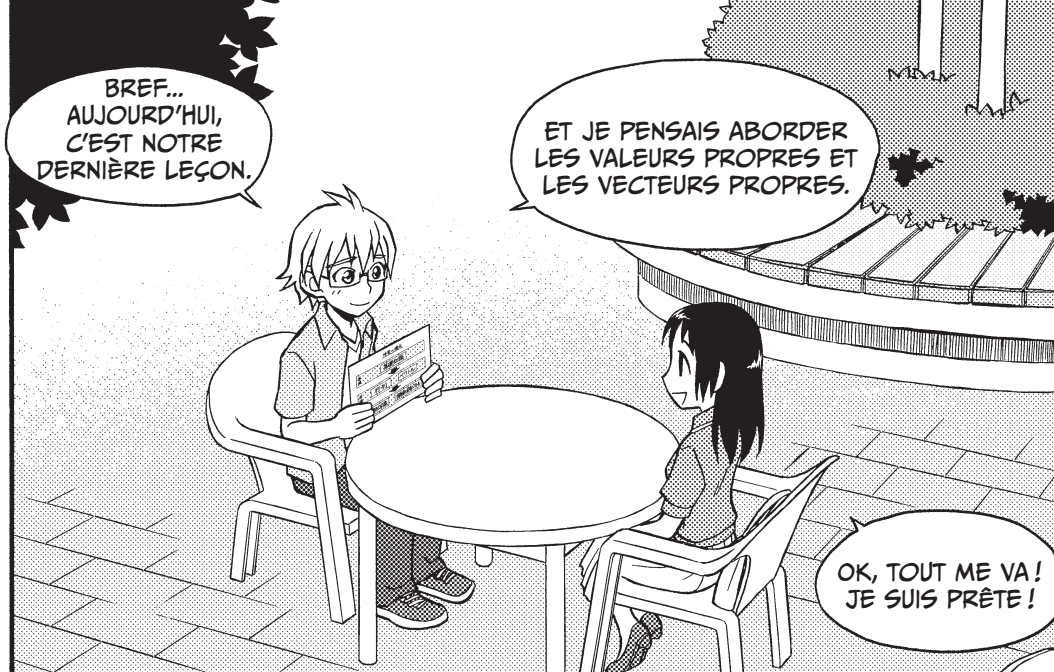
* COMMENCEZ !



* STOP !









MATRICES DIAGONALISABLES



RETOUR SUR L'EXEMPLE

Dans les pages précédentes, nous avons vu que la matrice $M = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ pouvait s'écrire sous la forme $P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ où Δ est la matrice diagonale au milieu et P est la matrice inversible dont les colonnes sont des vecteurs propres de M . Cela semble compliqué, mais c'est très pratique pour les multiplications ; par exemple,

$$\begin{aligned} M^3 &= (P\Delta P^{-1})(P\Delta P^{-1})(P\Delta P^{-1}) \\ &= P \underbrace{(\underbrace{P^{-1}P}_{I_3}) \Delta (\underbrace{P^{-1}P}_{I_3})}_{\Delta} P^{-1} \\ &= P\Delta^3 P^{-1} \\ M^3 &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

En d'autres termes, les $P^{-1}P$ du milieu se simplifient et il ne reste qu'à élever la matrice diagonale à la puissance 3, ce qui se calcule sans effort puisqu'il suffit d'élever chaque terme de la diagonale à la puissance 3. Bien sûr il faudrait calculer P^{-1} si l'on voulait réellement connaître l'expression de M^3 , mais en pratique, pour résoudre des problèmes, ce dont on a besoin c'est l'écriture $P\Delta^3 P^{-1}$.

Cette écriture a aussi l'avantage de donner des informations géométriques sur l'application linéaire u de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ associée à la matrice M . Elle nous dit que pour les vecteurs de la droite vectorielle dirigée par $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, u est une homothétie de rapport 7, et que pour les vecteurs de la droite vectorielle dirigée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ elle est une homothétie de rapport 2. On devine dès lors que la base $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est bien adaptée à l'application linéaire u puisque dans cette base, sa matrice est diagonale (c'est Δ).

En fait, si on ne vous avait donné que l'interprétation géométrique de u et demandé d'écrire sa matrice, vous auriez peut-être pensé à l'écrire directement dans sa base adaptée plutôt que dans la base canonique. Bien souvent, l'enjeu de l'étude d'une matrice est de (re)trouver une base dans laquelle l'application linéaire associée s'écrit simplement, c'est-à-dire une base qui respecte ses caractéristiques géométriques.

La matrice P , dans laquelle on écrit les coordonnées de la nouvelle base en fonction des vecteurs de l'ancienne base, est une *matrice de passage* de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à la base $(3\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} + 2\vec{j})$; elle représente le changement de base.

Les matrices M et Δ , qui représentent la même application linéaire dans deux bases différentes, sont dites *semblables*. Calculer Δ en étudiant M , c'est *diagonaliser* M .

Index

- Addition
 - entre matrices 72
 - entre vecteurs 127
- Application linéaire 56–58, 173
 - distorsion 185, 190
 - et matrice 174, 194–196
 - projection 191
 - rang 198–202
 - rotation 186–187, 190
 - translation 188–190
- Arrangements 61–63
- Axe 129
- Base 142–150, 158–160, 195–196
- Cofacteurs 90, 110–111
- Combinaisons 61–64
- Coordonnées 163–164
- Cramer 113
- Déterminants
 - définition formelle 103–107
 - et cofacteurs 110
 - et inversibilité 97, 197–198
 - interprétation géométrique ... 114
 - matrices 2×2 98–99
 - matrices 3×3 (règle de Sarrus) 100–101
 - règles de calcul 111–112
- Diagonale (matrice) 82–83
- Diagonalisable 217–219, 222–225
- Dimension 151–160
- Distorsion 185, 190
- Droites 129
- Engendré 156–157
- Ensembles
 - définition 36–37
 - de nombres 31–32
 - notations 38–39
 - parties 39–40
- Équivalence 35
- Espace vectoriel 131, 165
 - base .. 142–150, 158–160, 195–196
 - dimension 151–160
 - engendré 156–157
 - sous-espace vectoriel 152–157
- Famille
 - libre 137–141, 149
 - liée 137–141
- Fonction
 - définition 45
 - ensemble de définition 51
 - ensemble de départ 51
 - ensemble d'arrivée 51
 - image d'un élément 46–49
 - image d'une fonction 50–51
 - injective 52–53
 - reciproque 54–55
 - surjective 52–53
- Gauss (pivot de) 90–93
- i (imaginaire pur) 31–32
- Identité 84–85, 94
- Image 46–51, 198–202
- Implication 33–34
- Inclusion 39–40
- Indépendance linéaire ... 134–141, 145, 148–149
- Injective 52–53
- Inverse 88–96, 111, 113
- Inversible 97, 197–198
- Libre 137–141, 149
- Liée 137–141

Matrice	68	Produit	
addition	72	scalaire	163–164, 166
carrée	69	vectoriel	167–168
diagonale	82–83	Projection	191
diagonalisable ..	217–219, 222–225	Propositions	33
et application linéaire	174, 194–196	Puissance d'une matrice ..	217–219, 222
et système linéaire	71, 113	Racines d'un polynôme	223
identité	84–85, 94	Rang d'une matrice	198–202
image	198–202	Réciproque	54–55
inverse	88–96, 111, 113	Règle	
inversible	97, 197–198	de Cramer	113
multiplication	74–78	de Sarrus	100
noyau	198–202	du déterminant	103
nulle	79	Rotation	186–187, 190
rang	198–202	Sarrus	100
soustraction	73	Sous-espace vectoriel	152–157
symétrique	81	engendré	156–157
transposée	80	Soustraction	
triangulaire	81	entre matrices	73
unité	84–85, 94	entre vecteurs	127
valeurs propres	213–216	Surjective	52–53
vecteurs propres	213–216	Symétrique (matrice)	81
Méthode		Système linéaire	71, 113
de Cramer	113	Théorème du rang	199
des cofacteurs	90, 110–111	Translation	188–190
du pivot de Gauss	90–93	Transposée (matrice)	80
Multiplication		Valeur propre	213–216
entre matrices	74–78	Vecteur	
entre vecteurs	127, 163–164, 166–168	base ..	142–150, 158–160, 195–196
Multiplicité	223–225	colonne	128
Noyau	198–202	indépendance linéaire ...	134–141, 145, 148–149
Partie	39–40	ligne	128
Permutations	61–63	opérations	127
Pivot de Gauss	90–93	produit scalaire	163–164, 166
Plan	130	produit vectoriel	167–168
Polynôme caractéristique	214, 223, 225	propre	213–216